28-11-2010

לינארית 1 - תרגול 8 (מבח"ן)

הנושא: צירוף לינארי, תלות לינארית ו-Span

הגדרה:

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $v_1,\dots,v_n\in V$. **צירוף לינארי** של $v_1,\dots,v_n$ הוא ביטוי מהצורה $\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$ כאשר $\alpha_i\in\mathbb{F}$.

- אם $\alpha_i=0$ לכל $1\le i\le n$ נאמר שהוא צ"ל טריוויאלי.
- נאמר שוקטורים $v_1,\dots,v_n$ הם **ת"ל** (תלויים לינארית) אם יש צ"ל לא טריוויאלי אשר נותן אפס;

כלומר, אם קיימים סקלרים $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ לא כולם אפסים כך ש: $\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=0$.

אחרת, נאמר שהם **בת"ל**. אם $\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=0$ גורר ש: $\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$ אז הוקטורים הם בת"ל.

דוגמאות:

יהי $V=\mathbb{R}^2$ ויהיו $(2,3),(1,8)\in\mathbb{R}^2$. אזי צ"ל שלהם הוא, למשל, $5(2,3)+7(1,8)$ וצ"ל ט' הוא $0(2,3)+0(1,8)$.

שני הוקטורים הללו הם בת"ל, שכן, אם $\alpha(2,3)+\beta(1,8)=(0,0)$ אזי (קל לבדוק) יוצא ש- $\alpha=\beta=0$.

$(2\alpha,3\alpha)+(\beta,8\beta)=(0,0)$

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=0\Rightarrow\beta=-2\alpha\\3\alpha+8\beta=0\end{cases}$$

$3\alpha+8(-2\alpha)=0$

$3\alpha-16\alpha=0$

$-13\alpha=0$

$\boxed{\alpha=0,\ \beta=0}$

אם נבחר $(1,0),(2,4),(1,8)\in\mathbb{R}^2$ נראה שהם ת"ל שכן:

$3\cdot(1,0)+1\cdot(1,8)+(-2)\cdot(2,4)=(0,0)$

$=(3,0)+(1,8)+(-4,-8)=$

$=(3+1-4,\ 0+8-8)=(0,0)$

תרגיל:

נתבונן במ"ו הבא: $\mathbb{R}_2[x]=\{ax^2+bx+c\mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$. הבדיקו האם ארבעת הוקטורים הבאים הם ת"ל או בת"ל:

$f_1(x)=1+3x+x^2,\quad f_2(x)=1+4x+3x^2,\quad f_3(x)=2+3x,\quad f_4(x)=8x+x^2$

פתרון:

נבנה את הצ"ל הבא: $\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)+\gamma f_3(x)+\delta f_4(x)=0$ ונבדוק האם כל המקדמים חייבים להתאפס או שמא יש פתרון לא טריוויאלי.

$\alpha(1+3x+x^2)+\beta(1+4x+3x^2)+\gamma(2+3x)+\delta(8x+x^2)=0$

נקבץ לפי x, x^2 ומקדמים חופשיים

$(\alpha+\beta+2\gamma)+x(3\alpha+4\beta+3\gamma+8\delta)+x^2(\alpha+3\beta+\delta)=0$

כדי שפולינום זה יהיה אפס זהותית, כל המקדמים חייבים להתאפס:

$$(*)\begin{cases}\alpha+\beta+2\gamma=0\\3\alpha+4\beta+3\gamma+8\delta=0\\\alpha+3\beta+\delta=0\end{cases}$$

ניתן לפתור ולראות שהפתרון הוא:

$$\begin{pmatrix}10\frac{3}{4}\delta\\3\frac{1}{4}\delta\\\frac{15\delta}{4}\\\delta\end{pmatrix}$$

ולכן הוקטורים הם ת"ל.

הערה בקשר לתרגיל הקודם:

שימו לב שעל מנת לפתור את מע' המשוואות (*) שמנו אותה במטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת, ניתן לראות שהעמודות של המטריצה הן בדיוק המקדמים של ארבעת הפולינומים.

לכן, כדי לבדוק תלות לינארית, ניתן לשים את הווקטורים כעמודות של מטריצה. אם יש פתרון לא טריוויאלי ← אז' הווקטורים ת"ל, אחרת הם בת"ל.

תרגיל 53 (עמ' 38)

מצאו עבור אילו ערכי a יהיו הווקטורים הבאים בת"ל:

$V_1=(1,2,a)$, $V_2=(2a+1,2,3)$, $V_3=(2,4,a-1)$

פתרון:

נשים את הווקטורים כעמודות של מטריצה ונבדוק מתי יש רק את הפתרון הטריוויאלי.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2a+1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ a & 3 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-aR_1\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & (2a+1) & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & (-2a^2-a+3) & (-a-1) \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2a+1 & 2 \\ 0 & -4a & 0 \\ 0 & -2a^2-a+3 & -a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-4a)\cdot R_3\to R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2a+1 & 2 \\ 0 & -4a & 0 \\ 0 & (-2a^2-a+3)(-4a) & 4a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-(-2a^2-a+3)R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2a+1 & 2 \\ 0 & -4a & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2+4a \end{pmatrix}$$

יש רק את הפתרון הטריוויאלי (0,0,0) כאשר אין משתנים חופשיים. לכן, אנחנו רוצים שכל איברי האלכסון (הראשי) יהיו $\neq 0$.

משמע: $a\neq 0,-1$.

הגדרה:

נאמר שהקבוצה $A=\{v_1,\dots,v_n\}$ היא ת"ל אם קיים צ"ל לא טריוויאלי $\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=0$ (כלו' $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ לא כולם אפסים). אחרת, נאמר ש-A בת"ל. ϕ מוגדרת בת"ל.

תרגיל 58 (עמ' 39)

יהא V מ"ו. הוכיחו או הפריכו:

(ה) אם $A\subseteq V$ ת"ל אזי כל איבר של A הוא צ"ל של האחרים.

פתרון:

הפרכה: תהי $A\subseteq\mathbb{R}^2$ $A=\{(2,3),(4,6),(1,0)\}$. זו הקבוצה ת"ל, שכן $2\cdot(2,3)+(-1)(4,6)+0(1,0)=0$, אך, אין $\alpha,\beta\neq 0$ כך ש-

$(1,0)=\alpha(2,3)+\beta(4,6)$.

הגדרה:

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $\phi \neq S \subseteq V$ קבוצה כלשהי. "הפורש" של S הוא אוסף כל הצ"ל הסופיים של איברי S.

נסמן: $span(S)$ ומגדירים $span\{\phi\}=\{0\}$.

ואם $span(S)=V$ נאמר ש-S פורשת את V. $\Leftarrow$ זאת כל וקטור ב-V הוא צירוף לינארי של הוקטורים ב-S.

הערות על Span:

1. $\forall S\subseteq V$ (תת-קבוצה) תק, מתקיים $span(S)\subseteq V$ הינו תמ"ו (תת-מרחב).
2. $span(S)$ הוא התת-מרחב הקטן ביותר המכיל את S.

משמע: אם קיים $W\subseteq V$ תמ"ו המקיים $S\subseteq W$ אזי $span(S)\subseteq W$.

הערה: $\vec{0}\in Span(S)$ כי $span(S)$ הוא תת-מרחב.

דוגמאות: V

1. נבחר $S\subseteq\mathbb{R}^2$: $S=\{(1,0),(2,0)\}$. אזי:

$Span(S)=\{\alpha\cdot(1,0)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}=\{(\alpha,0)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}=$ ציר X, כי $(2,0)=2\cdot(1,0)$

וקטורית:

$$span(S)=span\{(1,0),(2,0)\}=\{\alpha(1,0)+\beta(2,0)\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=$$
$$=\{(\alpha+2\beta,0)\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\{(\gamma,0)\mid\gamma\in\mathbb{R}\}=\text{ציר X}$$

2. נבחר $S\in\mathbb{R}^{2\times2}$ (מטריצות 2×2): $S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$. אזי:

$$span(S)=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\mid\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\}=$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&\gamma\end{pmatrix}\mid\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\}=\{\text{מטריצות משולשיות עליונות}\}$$

ונאמר ש-S פורשת את תת-המרחב של מטריצות משולשיות עליונות.

★ ~~אחרי דף 5 יש דוגמאות נוספות (אם נשאר זמן).~~ המשך דוגמאות בדפים 8, 9

תרגיל 6.3 (עמ' 40)

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $A,B\subseteq V$ קבוצות כלשהן. הוכיחו או הפריכו:

א. $span(A+B)=span(A)\cup span(B)$

ב. $span(A\cup B)=span(A)\cup span(B)$

ג. $span(A+B)=span(A)+span(B)$

ד. $span(A\cap B)=span(A)\cap span(B)$

פתרון:

א + ב אינם נכונים היות ו-span הוא תמיד תמ"ו והאיחוד הוא לא. אזי על למצוא דוגמא נגדית, מספיק למצוא שני תמ"ו שאיחודם לא כזה.

$\mathbb{R}^2$: $A=\{(1,0)\}$, $B=\{(0,1)\}$

$Span(A+B)=span\{(1,1)\}=\{(t,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$

$Span(A)=\{(t,0)\mid t\in\mathbb{R}\}$, $Span(B)=\{(0,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$

קן דוגמאות של $Span(A) \not\subseteq span(B)$ ו- $Span(B) \not\subseteq span(A)$ ולכן האיחוד שלהם אינו תמ"מ.

② נשתמש בדוגמה הנגדית של ①: $(0,3) \in Span(B)$, $(1,0) \in Span(A)$ ולכן $(1,3) \in Span(A) + Span(B)$ ועם זאת $(1,3) \notin Span(A+B)$.

③ דוגמה נגדית: $A = \{(0,1)\}$, $B = \{(0,2)\}$, אזי $A \cap B = \phi$ ולכן $Span(A \cap B) = \{\bar{0}\}$, אך $Span(A) \cap span(B) = \{(0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

הערה:

מה שכן נכון זה הדבר הבא: $Span(A \cup B) = span(A) + Span(B)$.

תרגיל 6.5 (עמ' - 39)

ג) בדקי האם הנפרש שווה לקבוצה המופיעה אחריו. אם כן ← הציגי איבר כללי של הקבוצה באמצעות הווקטורים הנתונים. אם לא ← מצאי איבר שנמצא בקבוצה ולא בנפרש

$$\mathbb{R}^{2\times2} = span\left\{\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}\right\}$$

פתרון:

הסבר כללי:

כאשר מבקשים להוכיח שעבור תמ"מ כלשהו W מתקיים: $W = span\{v_1, \dots, v_k\}$ יש להוכיח הכלה דו-כיוונית:

$\boxed{\subseteq}$ לכל $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ מתקיים $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \in W$

$\boxed{\supseteq}$ עבור וקטור כללי $w \in W$ קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ כך, ש-
$w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$

אצלנו: ההכלה $\boxed{\subseteq}$ ברורה ולכן נוכיח את הצד השני.
איבר כללי ב- $\mathbb{R}^{2\times2}$ הוא מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$
ועלינו למצוא $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ עבורם:

$$\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_4 \\ y = 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 \\ z = 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 \\ t = \alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_4 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 & x \\ 2 & -1 & 1 & 3 & y \\ 2 & -1 & 1 & 3 & z \\ 1 & 1 & 0 & 5 & t \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 & x \\ 2 & -1 & 1 & 3 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z-y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-x \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 & x \\ 0 & -3 & 1 & -7 & y-2x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z-y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-x \end{array}\right)$$

ז"א, יש פתרון כאשר $z=y$ ו- $t=x$.

קיבלנו תנאי על האיבר השרירותי שבחרנו: זה אומר, למעשה,

שיש פתרון רק למטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$.

ז"א, רק מטריצות סימטריות

שייכות למרחב הנפרש! כלומר:

$$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \in R^{2\times 2} \;\middle|\; x,y \in \mathbb{R}\right\} \neq R^{2\times 2}$$

דוגמא לאיבר שנמצא בקבוצה ולא נמצא בנפרש: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

תרגיל חשוב?

דף 3

תרגיל 6.6 (עמ׳ 39)

בדוק האם $(1,2,4,5) \in Span\{(2,1,5,2),(1,1,3,1),(1,-2,0,3)\}$?

פיתרון:

צריך לבדוק האם קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ המתאימים:

$$\alpha_1(2,1,5,2)+\alpha_2(1,1,3,1)+\alpha_3(1,-2,0,3)=(1,2,4,5)$$

כ״כ, האם למערכת הבאה יש פיתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4-R_2\to R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3-5R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{R_4}{2}\to R_4,\ \frac{R_3}{(-2)}\to R_3]{-R_2\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3=2$$
$$\alpha_2-5\alpha_3=3$$
$$\boxed{\alpha_3=2}$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha_2-10=3$$
$$\boxed{\alpha_2=13}$$
$$\alpha_1+13-4=2$$
$$\boxed{\alpha_1=-7}$$

כ״כ, אם נקח: $\alpha_1=7,\ \alpha_2=13,\ \alpha_3=2$ נקבל ש:

$$(1,2,4,5)\in Span\{(2,1,5,2),(1,1,3,1),(1,-2,0,3)\}$$

משל

~~הערה: שימו לב שבזמן דרוג מערכת המשוואות שקיבלנו שורת אפסים. הדבר הזה משמעותו שבמערכת מדורגת, ללא שורות אפסים או שורות סתירה: יש מקרים של בה מס׳ המשוואות שווה למס׳ הנעלמים אז יש למערכת פיתרון יחיד.~~

המשך בדף הבא

בס"ד

<u>הערה:</u> שימו לב שכאן אין אינסוף פתרונות למרות שקיבלנו שורת אפסים.
הכלל הנ"ל: מסתכלים על המערכת המדורגת.
אם קיבלנו שורת סתירה ($0\ 0 \dots 0 = b \neq 0$) אז למערכת אין פתרון.
אם קיבלנו שורות אפסים - מורידים אותם מהמערכת ואז יש 2 מקרים:
<u>א.</u> אם מס' המשוואות שווה למס' הנעלמים אז יש למערכת פתרון יחיד
<u>ב.</u> אם מס' המשוואות <u>קטן</u> ממס' הנעלמים אז יש למערכת אינסוף פתרונות

דוג'

המשך דוגמאות ל- Span

1. $S=\{(1,2)\}$, $V=\mathbb{R}^2$.

$Span(S)=\{\alpha\cdot(1,2)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$

2. $S=\{(1,2),(2,4)\}$, $V=\mathbb{R}^2$. נשים לב ש: $2\cdot(1,2)=(2,4)$ ולכן:

$Span(S)=\{\alpha\cdot(1,2)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$

5. $S=\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, $V=\mathbb{R}^3$.

$Span(S)=\{\alpha\cdot(1,0,0)+\beta(0,1,0)\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$

זה בעצם מישור (x,y) ב- $\mathbb{R}^3$.

6. $S=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $V=\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}Span(S)&=\{x\cdot(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}=\\&=\{(x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}=\\&=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}=\boxed{\mathbb{R}^3}\end{aligned}$$

קיבלנו ש- S <u>פורשת</u> את $\mathbb{R}^3$.

7. $S=\{(1,2,1),(3,0,4),(4,2,5)\}$, $V=\mathbb{R}^3$. האם $Span(S)=\mathbb{R}^3$?

~~$Span(S)=\{\alpha_1(1,2,1)+\alpha_2(3,0,4)+\alpha_3(4,2,5)\mid\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}\}$~~

אנו צריכים לבדוק האם עבור (וקטור כלל) $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך ש:

$$\alpha_1(1,2,1)+\alpha_2(3,0,4)+\alpha_3(4,2,5)=(a,b,c)$$
$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3=a\\2\alpha_1+2\alpha_3=b\\\alpha_1+4\alpha_2+5\alpha_3=c\end{cases}\Longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&4&a\\2&0&2&b\\1&4&5&c\end{array}\right)\xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&4&a\\0&-6&-6&b-2a\\0&1&1&c-a\end{array}\right)$$

נדרג את המטריצה

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&4&a\\0&1&1&c-a\\0&-6&-6&b-2a\end{array}\right)\xrightarrow{R_3+6R_2\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&4&a\\0&1&1&c-a\\0&0&0&b-8a+6c\end{array}\right)$$

אנו נקבל פתרון רק כאשר תהיה שורת אפסים

$$\Downarrow$$

$$Span(S)=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\mid b-8a+6c=0\}\neq\mathbb{R}^3$$

כי למשל $(5,7,-2)\in\mathbb{R}^3$ אך: $(5,7,-2)\notin Span(S)$. ולכן S לא פורשת את $\mathbb{R}^3$.

בס"ד

<u>שאלה:</u> האם $(5,7,-2) \in Span(S)$?

<u>תשובה:</u> נבדוק: $7-8\cdot 5+6\cdot(-2)=-45\neq 0$. לכן-לא.

8. $V=\mathbb{R}^3$. $S=\{(1,2,1),(3,0,4),(4,2,6)\}$. האם $Span(S)=\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & a \\ 2 & 0 & 2 & b \\ 1 & 4 & 6 & c \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & a \\ 0 & -6 & -6 & b-2a \\ 0 & 1 & 2 & c-a \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & a \\ 0 & 1 & 2 & c-a \\ 0 & -6 & -6 & b-2a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3+6R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & a \\ 0 & 1 & 2 & c-a \\ 0 & 0 & 6 & b-8a+6c \end{array}\right)$$

$\Downarrow$

יש פתרון יחיד לכן <u>לכל</u> a,b,c שנבחר יהיו $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כ"ש:

$$\alpha_1(1,2,1)+\alpha_2(3,0,4)+\alpha_3(4,2,6)=(a,b,c)$$

$\Downarrow$

$Sp\{(1,2,1),(3,0,4),(4,2,6)\}=\mathbb{R}^3$.

$\Downarrow$

לכן הקבוצה S פורשת את $\mathbb{R}^3$.