תרגיל 6 – אלגברה מופשטת 1

1. הוכיחו את הסעיפים הבאים:

1.1 $Z/7Z \cong Z_7$

פתרון: נגדיר $f: Z \to Z_7$ באופן הבא: $f(n) = n(\bmod 7)$. קל לראות כי f הוא אפימורפיזם. לכן, לפי משפט האיזו הראשון נקבל כי $Z/\ker f \cong Z_7$. מכיוון ש $\ker f = \{n \in Z : n(\bmod 7) \equiv 0\} = \{n \in Z : 7 \mid n\} = 7Z$ נקבל את הדרוש.

1.2 $GL_n(F)/SL_n(F) \cong F^*$ לכל שדה F.

הוכחה: נגדיר $\varphi: GL_n(F) \to F^*$ על ידי: $\varphi(A) = \det A$. קל לראות כי φ הוא אפימורפיזם. לכן לפי משפט האיזו הראשון נקבל:

$GL_n(F)/\ker\varphi \cong F^*$.

אבל, $\ker\varphi = \{A \in GL_n(F) : \det A = 1\} = SL_n(F)$. לכן: $GL_n(F)/SL_n(F) \cong F^*$

1.3 $R/Z \cong T$ כאשר R, Z הם הממשיים והשלמים עם פעולת החיבור, בהתאמה ו $T = \{z : |z| = 1\}$.

פתרון: נגדיר $f: R \to T$ באופן הבא: $f(x) = e^{2\pi i x}$. קל לראות כי f הוא אפימורפיזם. לכן, לפי משפט האיזו הראשון נקבל כי $R/\ker f \cong T$.

מכיוון ש $\ker f = \{x \in R : e^{2\pi i x} = 1\} = \{x \in R : x \in Z\} = Z$ נקבל את הדרוש.

2. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. במקרים בהם הטענה נכונה מצאו את גרעין ההומומורפיזם.

2.1 קיים אפימורפיזם מהחבורה S_{14} לחבורה מסדר 34.

לא קיים אפימורפיזם. לו היה קיים אפימורפיזם φ כזה, אז $|S_{14}/\ker\varphi| = 34$.

אבל $34 = 2 \cdot 17$ אינו מחלק את סדר החבורה $|S_{14}| = 14!$, כי 17 הוא ראשוני גדול מ-14.

2.2 קיים אפימורפיזם $\varphi: Z \to Z_{60}$.

קיים אפימורפיזם לפי $\varphi(x) = x(\bmod 60)$. הגרעין הוא $60Z$.

2.3 קיים אפימורפיזם $\varphi: Z_{60} \to Z_{12}$.

קיים אפימורפיזם לפי $\varphi(x) = x(\bmod 12)$. הגרעין הוא $12Z_{60} = \{0,12,24,36,28\}$.

2.4 קיים איזומורפיזם $\varphi: D_6 \to U_{13}$.
לא קיים איזומורפיזם כי D_6 לא אבלית ואילו U_{13} אבלית.

2.5 קיים מונומורפיזם $\varphi: Z_{24} \to S_4$.
לא קיים מונומורפיזם כי סדר החבורות שווה, ולכן מונומורפיזם יהיה איזומורפיזם, אך Z_{24} אבלית ואילו S_4 לא אבלית.

3. ענו על הסעיפים הבאים:

3.1 תהי $H \le G$. הראו ש-$H \cap Z(G) \subseteq Z(H)$, ותנו דוגמה שבה זו הכלה אמיתית.
פתרון: יהי $x \in H \cap Z(G)$. אזי $x \in H$. צ"ל: לכל $h \in H$ מתקיים $xh = hx$. אך $x \in Z(G)$ ולכן מתחלף עם כל איברי G ובפרט עם כל איברי H.
דוגמה לכך שיש הכלה אמיתית:
$G = D_4, H = \langle \sigma \rangle \; , Z(G) = \langle \sigma^2 \rangle, Z(H) = H$.

3.2 בכל סעיף תנו דוגמה לחבורה G ולתת חבורה $H \le G$ המדגימה את הדרוש:
1. $Z(H) \subset Z(G)$ (הכלה ממש)
עבור $G = Z, H = 2Z$, $Z(H) = H \subset G = Z(G)$
2. $Z(G) \subset Z(H)$
הדוגמה מסעיף 3.1.
3. $Z(H)$ אינו מוכל ב-$Z(G)$ ואינו מכיל אותו.
$G = D_4, H = \langle \tau \rangle$

4. הוכיחו כי אם $N \lhd G$ אזי $Z(N) \lhd G$.
פתרון: צריך להראות שלכל $g \in G$ מתקיים $gZ(N)g^{-1} \subseteq Z(N)$. יהי $x \in gZ(N)g^{-1}$, אזי קיים $n \in Z(N)$ כך ש- $x = gng^{-1}$. מכיוון ש- $n \in Z(N) \subseteq N$ ו-$N \lhd G$, מתקיים $x \in N$. כעת נותר להראות שלכל $t \in N$ מתקיים $xt = tx$, או $gng^{-1}t = tgng^{-1}$ וזה שקול ל-$ng^{-1}tg = g^{-1}tgn$. אבל $n \in Z(N)$ ו- $g^{-1}tg \in N$ (שוב, בגלל הנורמליות) ולכן הוכחנו הדרוש.

5. ענו על הסעיפים הבאים:

5.1 תהי G חבורה עם תת חבורה H ותת-חבורות נורמליות N,N'. הוכיחו:
אם $N\bigcap H=N'\bigcap H$ אזי $(HN)/N\cong(HN')/N'$.
פתרון: לפי משפט האיזומורפיזם השני מקבלים
$HN/N\cong H/H\bigcap N\,;\ HN'/N'\cong H/H\bigcap N'$ ואז מהנתון מסיקים הדרוש.

5.2 תהי G חבורה ו-$N\triangleleft G$. נניח ש-G/N ו-N אבליות. תהי $H\le G$ תת חבורה כלשהי. הוכיחו שקיימת $K\triangleleft H$, כך ש-H/K ו-K אבליות.
פתרון: נגדיר את K להיות $H\bigcap N$. מכיוון ש-$N\triangleleft G$ נקבל $H\bigcap N\triangleleft H$.
בנוסף, מכיוון ש-$H\bigcap N\le N$ נקבל שהיא אבלית. נותר להראות ש-$H/H\bigcap N$ אבלית. שימו לב שלפי משפט איזומורפיזם השני ידוע כי $H/H\bigcap N\cong HN/N$. כעת, מכיוון ש-HN/N היא תת חבורה של G/N, היא אבלית. לכן גם $H/H\bigcap N$ אבלית, כנדרש.

6. ענו על הסעיפים הבאים.

6.1 תנו דוגמה נגדית לטענה השגויה הבאה: אם $A,B\triangleleft G$, ו-$G/A\cong B$ אזי $G/B\cong A$.
פתרון: ניקח למשל $G=D_4$. וניקח שתי תתי חבורות נורמליות:
$A=\langle\sigma\rangle, B=Z(D_4)=\langle\sigma^2\rangle$. אכן מתקיים $D_4/\langle\sigma\rangle\cong\langle\sigma^2\rangle$ (כי יש חבורה יחידה מסדר 2). אך לא מתקיים ש-$D_4/\langle\sigma^2\rangle\cong\langle\sigma\rangle$, שכן החבורה מימין היא ציקלית, והחבורה משמאל היא לא (זכרו שהוכחנו בתרגול טענה אודות חבורה מודולו המרכז שלה).

6.2 נניח $K\triangleleft G$ ו- $G/K\cong Z$. הוכיחו שלכל $n\in Z$ קיימת ב-G תת חבורה מאינדקס n.
פתרון: מכיוון ש- $G/K\cong Z$, קיים אפימורפיזם $f_1:G\to Z$. כמו כן, קיים אפימורפיזם $f_2:Z\to Z_n$. אזי העתקת ההרכבה $\phi=f_2\circ f_1:G\to\mathbb{Z}_n$ היא גם כן אפימורפיזם. לכן תת החבורה הדרושה היא $\ker\phi$, ולפי משפט האיזומורפיזם הראשון $G/Ker\phi\cong Z_n$ לכן, $Ker\phi$ תת חבורה מאינדקס n.

7. תהי G חבורה (לא בהכרח סופית) ותהיינה $A,B\triangleleft G$. הוכיחו או הפריכו:

7.1. $G/B \cong G/A$ אם ורק אם $A = B$.

נפריך את הטענה: הדוגמה הנגדית ל 8.2 היא בפרט דוגמה נגדית לסעיף זה.

7.2. $G/B \cong G/A$ אם ורק אם $A \cong B$.

נפריך את הטענה: הדוגמה מסעיף 8.3 היא בפרט דוגמה נגדית לסעיף זה. אכן, עבור $G = C^*$, $B = \{1\}, A = \{1,-1\} \le G$, נקבל מסעיף 8.3 כי $G/B \cong G \cong G/A$. על אף ש A אינה איזומופית (ובפרט לא שווה) ל B

7.3. אם $G \cong G/A$ אזי A היא תת-החבורה הטריוויאלית.

נפריך את הטענה: ניקח $G = C^*$, $f : C^* \to C^*$ ההומומורפיזם המוגדר ע"י $f(x) = x^2$. אזי עבור $A = \ker(f) = \{1,-1\}$ מתקיים $G \cong G/A$, בעוד ש-A אינה טריוויאלית.

בהצלחה! ☺