פתרון תרגיל 5 – מבוא לאלגברה לינארית

.1

(א) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

פתרון:

נדרג את המטריצה עד שנגיע למטריצת הזהות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{-1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן $A^{-1} = E_3E_2E_1$ ולכן $A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ב) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

פתרון:

נדרג את המטריצה עד שנגיע למטריצת הזהות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן $A^{-1} = E_4E_3E_2E_1$

ולכן $A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

.2

פתרון:

לפי הנתונים $E_2E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, נכפול בהופכי של E_2 משמאל ואז בהופכי של E_1 משמאל ונקבל

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

.3

פתרון

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{R_1-2R_2\to R_2 \\ R_1-2R_3\to R_3 \\ R_1-2R_4\to R_4}}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{R_2+R_3\to R_3 \\ R_2+R_4\to R_4}}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{-\frac{1}{2}R_4\to R_4 \\ -\frac{1}{2}R_3\to R_3 \\ -R_2\to R_2 \\ \frac{1}{2}R_1\to R_1}}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1.5 & 2 & 2.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{R_1-2.5R_4\to R_1 \\ R_2-3R_4\to R_2 \\ R_3-2R_4\to R_3}}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1.5 & 2 & 0 & 3 & -2.5 & 0 & -2.5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{R_1-2R_3\to R_1 \\ R_2-2R_3\to R_2}}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1.5 & 0 & 0 & 1 & -0.5 & -2 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_1-1.5R_2\to R_1}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

.4

פתרון

א. $A^3 = A^2A = AA^2 = I \Rightarrow A^2 = A^{-1}$

ב.

$$BA = A(A+I) = A^2 + AI = A^2 + A$$
$$\Rightarrow BAA^{-1} = BI = B = \left(A^2 + A\right)A^{-1} = A^2A^{-1} + AA^{-1} = A + I$$

ג.

$$BABA = \left[A\left(A+I\right)\right]^2 = \left(A^2 + A\right)^2 + A^4 + 2A^3 + A^2 = A^2(A^2 + 2A + I) = A^2\left(A+I\right)^2 = A^2B^2$$

.5

1. תהי A מטריצה הפיכה. הוכיחו את הטענות הבאות:

1.1.קיימת ל A מטריצה הופכית יחידה.

הוכחה: נניח כי B,C מטריצות הפיכות של A. מספיק להוכיח: $B=C$.
B,C מטריצות הפיכות של A לכן, $AB=BA=I$ וכן $AC=CA=I$.
לכן, $B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C$. מש"ל.

1.2. A^t הפיכה.

הוכחה: A מטריצה הפיכה, לכן קיימת מטריצה B כך ש $AB=I$.
נפעיל שיחלוף על שני הצדדים ונקבל,

$$(AB)^t=I^t \Rightarrow$$

$$B^tA^t=I$$

לכן A^t הפיכה משמאל ולכן הפיכה. מש"ל.

1.3. A^5 הפיכה.

הוכחה: נתון A מטריצה הפיכה. נוכיח באינדוקציה כי לכל n טבעי A^n הפיכה ונקבל בפרט, A^5 הפיכה.
עבור $n=1$, נתון כי $A^n=A^1=A$ הפיכה.
נניח כי A^n הפיכה ונוכיח בהסתמך על כך כי A^{n+1} הפיכה.
A^n הפיכה לכן קיימת $(A^n)^{-1}$. בנוסף, נתון כי A הפיכה, לכן קיימת A^{-1}.
אבל, $A^{n+1}((A^n)^{-1}A^{-1})=(AA^n)((A^n)^{-1}A^{-1})=A(A^n)(A^n)^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$
לכן A^{n+1} הפיכה מימין ולכן הפיכה.