תורת הקבוצות — תרגיל בית 3

חיים שרגא רוזנר

ט' בניסן, תשע"ה*

תקציר

איזומורפיזם סדר, רישא, קבוצות סדורות היטב איזומורפיות; סודר עוקב, סודר גבולי, חיבור סודרים.

תזכורות

1. פונקציות שומרות סדר ורישאות

(א) תהיינה $(A,<),(B,\prec)$ קבוצות סדורות בסדר מלא, ותהי פונקציה $f\colon A\to B$. נאמר שפונקציה זו היא **שומרת סדר** (או: מונוטונית) אם לכל $x<y\in A$ מתקיים $f(x)\prec f(y)$. אם הפונקציה הזו היא הפיכה, אז היא נקראת **איזומורפיזם סדר**, ונסמן זאת $A\overset{f}{\cong}B$ (ניתן להשמיט את f לפי העניין).

(ב) תהי A קבוצה סדורה (בסדר מלא), B תת־קבוצה. נאמר ש־B היא **רישא** של A אם לכל $y\in B$ ולכל $x\in A$ המקיים $x<y$, מתקיים $x\in B$. במילים: רישא היא תת־קבוצה שכל קודמי איבריה הם איברים שלה.

(ג) תהי A קבוצה סדורה (בסדר מלא), $x\in A$. נסמן את ה**רישא הנקבעת על ידי x ב־A** כך:

$$\overset{x}{A}:=\{y\in A\colon y<x\}$$

יש רישאות שאינן נקבעות על ידי איבר כלל.

(ד) תהי $(A,<)$ קבוצה סדורה היטב. אזי קיים סודר אחד ויחיד δ כך ש־A איזומורפית סדר ל־δ.

2. הסודר העוקב, סודרים עוקבים וגבוליים, חיבור סודרים.

(א) $S(\alpha)=\alpha\cup\{\alpha\}$, וזה הסודר העוקב המיידי של α.

(ב) **סודר עוקב** הוא סודר β שקיים עבורו סודר α כך ש־$\beta=S(\alpha)$.

---

*להגשה עד יום **שני** ח' באייר (27 אפר') לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

(ג) **מספר טבעי** הוא סודר שהן הוא והן כל קודמיו הינם סודרים עוקבים או 0. נסמן את קבוצת המספרים הטבעיים על ידי

$$\omega := \{0, 1, 2, \ldots\}$$

ω הוא הסודר הלא־טבעי הראשון. הוא גם הסודר הגבולי הראשון.

(ד) **סודר גבולי** הוא סודר שאיננו אפס ואיננו עוקב.

(ה) **חיבור סודרים**: יהיו α, β סודרים. נגדיר את **הסכום הזר** שלהם

$$\alpha \uplus \beta := \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta$$

ניתן להגדיר, באופן טבעי, סדר מילוני על קבוצה זו. הקבוצה $\alpha \uplus \beta$ סדורה היטב על פי סדר זה, ולפי תזכורת 1ד קיים סודר אחד ויחיד אליו הקבוצה איזומורפית. נסמן סודר זה $\alpha + \beta$.

(ו) חיבור סודרים איננו חילופי (קומוטטיבי).

1 איזומורפיזם סדר ורישאות

בפרק זה יש בחירה בין שתי השאלות האחרונות.

1. בהרצאה הוגדרה רק רישא הנקבעת על ידי איבר (כמובא בתזכורת 1ג לעיל), והיא הוגדרה רק על קבוצות סדורות היטב. נעמוד כעת על ההבדלים שבין ההגדרה זו להגדרה שאני הבאתי, המופיעה בתזכורת 1ב שם.
תהי $(A, <)$ קבוצה סדורה <u>היטב</u> (לנוחותכם, ניתן להניח שהיא סודר, לפי סעיף 1ד). הבחינו בכך שכל רישא הנקבעת על ידי איבר ב־A היא רישא גם לפי תזכורת 1ב. מצאו אילו רישאות של A אינן נקבעות על ידי איבר.

2. הוכיחו שהאיזומורפיזם היחיד מקבוצה סדורה היטב לעצמה הוא פונקציית הזהות.

הדרכה בהנתן איזומורפיזם $f\colon A \to A$ שאינו הזהות, קח $a \in A$ ראשון כך ש $f(a) \neq a$. בהכרח $f(a) < a$ או $f^{-1}(a) < a$.

3. הוכיחו שאם $A \cong B$ קבוצות סדורות היטב, אז האיזומורפיזם ביניהן הוא יחיד. הסיקו שהאיזומורפיזם היחיד מקבוצה סודרה היטב לעצמה הוא פונקצית הזהות.

4. לקבוצה סדורה היטב A אין שתי רישאות הנקבעות על ידי איברים שונים שהן איזומורפיות זו לזו: אם $x, y \in A$ ומתקיים $\overset{x}{A} \cong \overset{y}{A}$, אז $x = y$.

2 סודרים

1. יהיו α, β, γ סודרים. הראו כי מתקיימת אסוציטיביות: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

הדרכה שניהם איזומורפיים ל $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta) \cup (\{2\} \times \gamma)$.

2. **חיסור סודרים:** יהיו $\alpha \leq \beta$. נגדיר חיסור סודרים $\beta - \alpha := \mathrm{type}(\beta \setminus \alpha)$. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) $\alpha + (\beta - \alpha) = \beta$.

(ב) $\alpha = \beta \iff \beta - \alpha = 0$.

(ג) $\alpha < \beta \iff \beta - \alpha > 0$.

תרגיל רשות

3. ניתן הגדרה פורמלית ל־ω:
תהי X קבוצה. נאמר ש־X היא קבוצה **אינדוקטיבית** אם מתקיים $\varnothing \in X$ וכן לכל $x \in X$ גם $x \cup \{x\} \in X$. לפי האקסיומות, קיימת קבוצה אינדוקטיבית.[1] כעת נגדיר

$$\omega := \cap \{X \colon X \text{ is inductive}\}$$

לפי האקסיומות, קל להראות כי ω היא קבוצה מוגדרת היטב[2].

(א) הראו כי לכל קבוצה אינדוקטיבית X גם הקבוצה $X \cap ON$ (קבוצת הסודרים שב־X) היא אינדוקטיבית.

(ב) הראו כי כל סודר גבולי הוא אינדוקטיבי.

(ג) הראו כי ω היא קבוצת סודרים.

(ד) הראו כי היא סודר.

(ה) הראו כי היא סודר גבולי.

(ו) הראו כי היא הסודר הגבולי הקטן ביותר (שאיננו 0).

(ז) הראו כי ω היא קבוצת הסודרים הטבעיים.

הדרכה לסעיף (ג), הראו כי קיים סודר קטן ביותר γ שאיננו ב־ω. הראו כי $\omega \subseteq \gamma$. הראו כי γ קבוצה אינדוקטיבית, והסיקו $\gamma \subseteq \omega$. לסעיף (ד), הראו כי ω (או γ שמצאתם בסעיף הקודם) איננה אפס ואיננה סודר עוקב. לסעיף (ה), הניחו בשלילה כי α סודר גבולי המקיים $0 < \alpha < \omega$. מדוע $\omega \subseteq \alpha$, והגיעו לסתירה.

ב ה צ ל ח ה!

[1] לפי אחד הנוסחים של ZFC, אקסיומת האינסוף היא האקסיומה הקובעת כי קיימת קבוצה אינדוקטיבית. בקורס שלנו נלמד ניסוח אחר לאקסיומות, ואקסיומת האינסוף תהיה קיימת הקבוצה ω.

[2] תהי $\tilde{X}$ קבוצה אינדוקטיבית. אזי

$$\omega = \bigcap \left\{ X \in \mathcal{P}\left(\tilde{X}\right) : X \text{ is inductive} \right\}$$

(נמקו את השויון). כשנלמד על האקסיומות יהיה ברור מדוע ניסוח זה מוגדר היטב, ואם לא יהיה ברור — שאלו אותי אז.