

פיתרון לתרגיל מספר 8

תשובה 1:

יהי X_i - התוצאה בדקה ה- i . צריך למצוא חסם עליון להסתברות $P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i \geq 49\right)$ כאשר

$$X_i \sim U(1,6) \text{ . לכל } i : E(X_i) = \frac{1+6}{2} = 3.5 \text{ , } V(X_i) = \frac{(6-1+1)^2 - 1}{12} = \frac{35}{12} \text{ . לכן}$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{12} X_i\right) = 12 \cdot 3.5 = 42 \text{ . מאחר שההטלות ב"ת ולכן יש את אותה התפלגות נקבל:}$$

$$V\left(\sum_{i=1}^{12} X_i\right) = 12 \cdot V(X_i) = 12 \cdot \frac{35}{12} = 35$$

מכאן, לפי אי שיוויון צ'בישב:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i \geq 49\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i - 42 \geq 49 - 42\right) \leq P\left(\left|\sum_{i=1}^{12} X_i - 42\right| \geq 49 - 42\right) \leq \\ &\leq \frac{V\left(\sum_{i=1}^{12} X_i\right)}{(49 - 42)^2} = \frac{35}{(49 - 42)^2} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

מכיון שסכום תוצאות הקוביות הוא סימטרי סביב תוחלתו אז ניתן לחלק את החסם ב 2 ולקבל חסם

$$\text{עליון: } \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{14}$$

תשובה 2:

לא. אם $E(X) = 4$ ויש סטייה של $9 - E[X] = 9 - 4 = 5$ בסיכוי $\frac{1}{2}$, אז בסיכוי $\frac{1}{2}$ רבוע הסטייה

$$\text{הוא } 25 \text{ . לכן } V(X) = \frac{1}{2} \cdot (9 - 4)^2 + \sum_{x \neq 9} P(X = x) \cdot (x - 4)^2 \geq \frac{1}{2} \cdot 25 = 12.5$$

גדולה מ 5 וזאת סתירה.

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{(a - E(X))^2} : (1) \text{ בתשובה (1) :}$$

$$P(|X - 4| \geq 5) \leq \frac{5}{(9 - 4)^2} = \frac{1}{5} \text{ שאומר כאן ש } P(X = 9) = 0.5 \text{ לכן לא יתכן שיתקיים}$$

תשובה 3:

א. ההתפלגות של המשתנה האחד הבדיד היא :

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1} & k = a, a+1, \dots, b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ולכן הפונקציה היא

$$\begin{aligned} M(s) &= \sum_{k=a}^b \frac{1}{b-a+1} e^{sk} = \frac{e^{sa}}{b-a+1} \sum_{k=0}^{b-a} e^{sk} \\ &= \frac{e^{sa}}{b-a+1} \cdot \frac{1 - e^{s(b-a+1)}}{1 - e^s} \end{aligned}$$

ב. באופן אנלוגי, (כמובן באינטגרציה) הפונקציה המתאימה למשתנה האחד הרציף היא :

$$M(s) = E[e^{sX}] = \int_a^b \frac{e^{sx}}{b-a} dx = \frac{e^{sb} - e^{sa}}{s(b-a)}$$

תשובה 4:

א. נשים לב שאם $X = 1$ (מה שקורה בהסתברות של $\frac{1}{3}$) אזי $U = Y$ ואם $X = 0$ (מה שקורה בהסתברות של $\frac{2}{3}$) אזי $U = Z$. לכן

$$\begin{aligned} M_U(s) &= P(X = 1) \cdot M_Y(s) + P(X = 0) \cdot M_Z(s) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2-s} + \frac{2}{3} \cdot e^{(e^Z-1)s} \end{aligned}$$

ב. נסמן $V = 2Z + 3$ אזי

$$\begin{aligned} M_V(s) &= M_{2Z+3}(s) = M_{2Z}(s) + M_3(s) = M_Z(2s) + e^{3s} = \\ &= e^{3(e^{2s}-1)} e^{3s} = e^{3(e^{2s}+s-1)} \end{aligned}$$

ג. יהי $W = Y + Z$ אזי

$$M_W(s) = M_{Y+Z}(s) = M_Y(s)M_Z(s) = \frac{2}{2-s} \cdot e^{3(e^{2s}-1)}$$

תשובה 5:

א. דרך א. ידוע שלכל מ"מ X שעבורו קיימת פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(0) = 1$ (ראו בחוברת הקורס לאחר משפט מרצבך-שומרון). אם נציב 0 נראה שרק הפונקציה הראשונה מקיימת זאת.
דרך ב. הגבול של הפונקציה יוצרת המומנטים במינוס אינסוף היא ההסתברות שהמשתנה המקרי מקבל את הערך 0 (מדוע?) נחפש את הגבול הזה ב-2 המקרים:

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} (M(s)) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \left(e^{2(e^{e^s} - 1)} \right) =$$
$$\lim_{Y \rightarrow 0} \left(e^{2(e^{Y-1} - 1)} \right) = e^{2(e^{-1} - 1)} = e^{2 \cdot (-0.3678)} = 0.282$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} (M(s)) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \left(e^{2(e^{e^s} - 1)} \right) =$$
$$\lim_{Y \rightarrow 0} \left(e^{2(e^0 - 1)} \right) = e^0 = 1$$

מכאן רואים שהפונקציה השניה נותנת את הגבול 1 , ז"א שאם היא היתה פונקציה יוצרת מומנטים ההסתברות של הערך 0 היתה 1 . אבל, אם זהו המשתנה המקרי הרי שהפונקציה יוצרת המומנטים שלו היא $e^0 = 1$.

ב. רואים מסעיף (א) שההסתברות היא 0.282 .

תשובה 6:

ראשית נמצא את הקבוע c ע"י שימוש ב- $M_X(0) = 1$:

$$1 = M_X(0) = c \cdot \frac{3 + 4 + 2}{3 - 1} = \frac{9}{2}$$

$$c = \frac{2}{9}$$

$$E[X] = \frac{d}{ds} M(s) \Big|_{s=0} = \frac{2}{9} \cdot \frac{(8 \cdot e^{2s} + 6 \cdot e^{3s})(3 - e^s) + e^s(3 + 4e^{2s} + 2e^{3s})}{(3 - e^s)^2} \Big|_{s=0}$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{14 \cdot 2 + 9}{4} = \frac{37}{18}$$

המשך לתשובה 6:

כעת נשתמש בזהות:

$$\frac{1}{3-e^s} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-e^s/3} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{e^s}{3} + \frac{e^{2s}}{9} + \dots\right)$$

הזהות הזו נכונה כל עוד s קטן מספיק כך ש: $e^s < 3$.

ומכאן:
$$M_X(s) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} \cdot (3 + 4e^{2s} + 2e^{3s}) \left(1 + \frac{e^s}{3} + \frac{e^{2s}}{9} + \dots\right)$$

עכשיו נוכל לזהות את המקדמים של $e^s - 1$ ונקבל:

$$P(X=0) = 2/9$$

$$P(X=1) = 2/27$$

נסמן באות A את המאורע $X \neq 0$, ונקבל:

$$P_{X|A}(k) = \begin{cases} \frac{p_X(k)}{P(A)} & k \neq 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

כך ש:

$$\begin{aligned} E[X | X \neq 0] &= \sum_{k=1}^{\infty} k p_{X|A}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k p_X(k)}{P(A)} = \frac{E[X]}{1 - P(X=0)} \\ &= \frac{37/18}{7/9} = \frac{37}{14} \end{aligned}$$

תשובה 7:

א. לפי משפט הגבול המרכזי:

$$S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$Z = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$\sum_{i=1}^{120} X_i = S_{120} \sim N(120*1.2, 120*0.4^2) = N(144, 19.2)$$

$$P(S_{120} > 140) = P(Z > \frac{140-144}{\sqrt{19.2}}) = P(Z > -0.912) =$$

$$= 1 - P(Z < -0.912) = 1 - [1 - \Phi(0.912)] = \Phi(0.912) = 0.8186$$

ב. לפי משפט הגבול המרכזי:

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{30} X_i}{30} = \bar{X}_{30} \sim N(1.2, \frac{0.4^2}{30})$$

$$P(\bar{X}_{30} > 1.5) = P(Z > \frac{1.5-1.2}{0.4/\sqrt{30}}) = P(Z > 4.1) =$$

$$= 1 - P(Z < 4.1) = 1 - \Phi(4.1) \approx 0$$

לכן הסיכוי שהמדריך צודק הוא אפסי.

ג. נחשב הסתברות של חממה כלשהי להיסגר:

$$P(X_i < 1) = P(X_i < \frac{1-1.2}{0.4}) = P(Z < -0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 0.3085$$

נסמן ב W את מספר החממות בהן היבול קטן מ 1 טון (מתוך 120 חממות)

$$W \sim \text{Bin}(120, 0.3085)$$

נבדוק האם אפשר לבצע קירוב נורמלי לבינומי (כלל - אם $np > 5$ ניתן לקרב)

$np = 120 * 0.3085 = 37.02 > 5$ לכן ניתן לעשות קירוב. מכאן ש-W מתפלג

בקירוב נורמלית עם הפרמטרים הבאים:

$$W \sim N(np, npq) = N(37.02, 25.6) \quad \text{לכן}$$

$$P(W \geq 12) = P(Z \geq \frac{12-37.02}{\sqrt{25.6}}) = P(Z \geq -4.945) = 1 - P(Z \leq -4.945) = \Phi(4.945) \approx 1$$

תשובה 8:

א. X - מ"מ המציין את משקל הפיתה

$$X \sim N(100, 5^2)$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 100}{5}$$

$$\begin{aligned} P(95 < X < 97) &= P\left(\frac{95-100}{5} < Z < \frac{97-100}{5}\right) = P\left(-1 < Z < -\frac{3}{5}\right) = \\ &= P\left(Z < -\frac{3}{5}\right) - P(Z < -1) = \left[1 - \Theta\left(\frac{3}{5}\right)\right] - [1 - \Theta(1)] = \Theta(1) - \Theta\left(\frac{3}{5}\right) = 0.8413 - 0.7257 = 0.1156 \end{aligned}$$

$$P(X < 95) = P\left(Z < \frac{95-100}{5}\right) = P(Z < -1) = [1 - \Theta(1)] = 1 - \Theta(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587 > 0.1$$

ב.

מסקנה: המאפיה אינה עומדת בתקן

על מנת לעמוד בתקן:

$$P(X < 95) = P\left(Z < \frac{95-100}{\sigma}\right) \leq 0.1$$

$$\Theta\left(-\frac{5}{\sigma}\right) \leq 0.1 \Rightarrow 1 - \Theta\left(\frac{5}{\sigma}\right) \leq 0.1 \Rightarrow \Theta\left(\frac{5}{\sigma}\right) \geq 0.9 \Rightarrow \frac{5}{\sigma} \geq 1.29 \Rightarrow \sigma \leq 3.876$$

ג. נשתמש במשפט הגבול המרכזי: $S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ לכן

$$\text{נתקן } Z = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \text{ ונקבל } \sum_{i=1}^{30} X_i = S_{30} \sim (30 \cdot 100, 30 \cdot 5^2)$$

$$P(S_{30} < 2950) = P\left(Z < \frac{2950 - 30 \cdot 100}{5\sqrt{30}}\right) = 1 - \Theta(1.825) = 1 - 0.966 = 0.034$$

ד. יהי W מ"מ המציין את משקל הפיתה עם החומוס והמלפפון ויהי Y מ"מ המציין את משקל

החומוס בתוך הפיתה. אזי $W = 20 + X + Y$ ו- $Y \sim N(50, 3^2)$ לכן

$$E(W) = E(20 + X + Y) = 20 + E(X) + E(Y) = 20 + 100 + 50 = 170$$

$$\text{Var}(W) = \text{Var}(20 + X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 25 + 9 = 34$$

ו- $W \sim N(170, 34)$

מכאן ש $\bar{W} = \frac{\sum W_i}{16} \sim N(170, 34/16)$ נתקן ונקבל:

$$P(\bar{W} > 171.5) = P\left(Z > \frac{171.5 - 170}{\sqrt{34/16}}\right) = P(Z > 1.03) = 1 - \Theta(1.03) = 1 - 0.8458 = 0.1542$$

תשובה 9:

א. תוחלת של כל אחד מ- X_j היא $\mu = \frac{-0.5+0.5}{2} = 0$ כאשר השונות היא

$$\sigma^2 = \frac{(0.5 - (-0.5))^2}{12} = \frac{1}{12}$$

על פי משפט הגבול המרכזי,

$$P\left(\sum_{j=1}^{12} X_j > 1\right) = 1 - P\left(\sum_{j=1}^{12} X_j \leq 1\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1 - 12 \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12} \cdot 12}}\right) = 1 - \Phi(1) \approx 0.1587$$

ב. חישוב דומה מביא:

$$P\left(\sum_{j=1}^{12} X_j \leq 2\right) = \Phi\left(\frac{2 - 12 \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12} \cdot 12}}\right) = \Phi(2) \approx 0.9772$$