(I)

פיסיקה קלאסית - תרגיל 13

1) א. מאחר ואין לנו איבוד אנרגיה האנרגיה הרי שהאנרגיה במרחק l

$$E=\frac{1}{2}kl^2$$

שווה לאנרגיה בנקודת שיווי המשקל:

$$E=\frac{1}{2}mv_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

מאחר ומדובר בגלגל ללא החלקה אז: $v_{cm}=\omega R$

כמו כן $I_{גלגל}=\frac{1}{2}mR^2$

ולכן

$$\frac{1}{2}kl^2=\frac{1}{2}m(\omega R)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}\left(mR^2+\frac{1}{2}mR^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mR^2\right)\omega^2$$

$$kl^2=\frac{3}{2}mR^2\omega^2$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{3}kl^2=\frac{1}{2}mR^2\omega^2$$

$$\boxed{E_{קווי}=\frac{1}{2}mv_{cm}^2=\frac{1}{2}mR^2\omega^2=\frac{1}{3}kl^2}$$

$$\boxed{E_{סיבוב}=E-E_{קווי}=\frac{1}{2}kl^2-\frac{1}{3}kl^2=\frac{1}{6}kl^2}$$

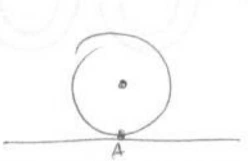
ב. מאחר וקיים תנועה סיבובית וקיים כח משתנה:

$$\sum\tau=Rk\Delta x=I\alpha$$

כאשר נציר את הסימנים בצורה נכונה הרי שהכח הפוך לכיוון ההעתק x ולכן:

$$Rk(-x)=I_A\alpha$$

מתנועה ללא החלקה: $R\alpha=\ddot{x}$



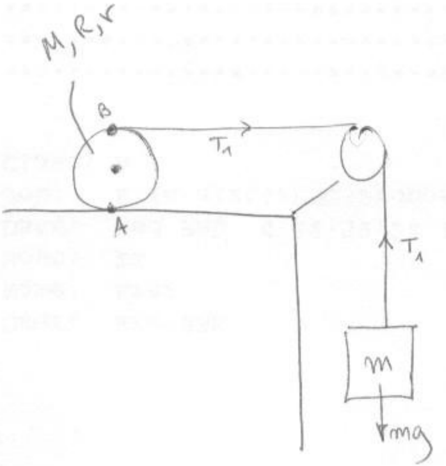
$$I_A=I_{cm}+mR^2=$$
$$=\frac{1}{2}mR^2+mR^2=\frac{3}{2}mR^2$$

$$I\frac{\ddot{x}}{R}+RkX=0$$

$$\ddot{x}+\frac{R^2k}{I_A}x=0$$

$$\ddot{x}+\frac{R^2k}{\frac{3}{2}mR^2}x=0$$

$$\ddot{x}+\underbrace{\frac{2k}{3m}}_{\omega_0^2}x=0\longrightarrow\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}}$$



(2 נרשום את משוואות הכוחות עבור המסה
כאשר נבחר את כיוון התנועה של המשקולת למטה והגלגל לכיוון
ימין מתגלגל ימינה:

(i) $\sum F_y = m\ddot{y} = mg - T_1$

נסתכל על הגלגל כמסתובב סביב נקודת המגע ולכן:

(ii) $\sum \tau = 2RT_1 = I_A\alpha$

ואז עבור נקודה B: $2R\omega = \dot{y}$

(iii) $2R\alpha = \ddot{y}$

מתוך (i) נבודד את T_1

$T_1 = mg - m\ddot{y}$

ונציב ב-(ii)

$2R(mg - m\ddot{y}) = I_A\alpha$

כאשר I הינו

$I_A = I_{cm} + MR^2$

(iv) $I_{cm} = \frac{1}{2}M(r^2+R^2)$

$I_A = I_{cm} + MR^2 = \frac{1}{2}Mr^2 + \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{1}{2}Mr^2 + \frac{3}{2}MR^2$

$2Rmg - 2Rm\ddot{y} = I_A\alpha$

נציב את (iii)

$2Rmg - 2Rm(2R\alpha) = I_A\alpha$

$2Rmg = (4R^2m + I_A)\alpha$

ו-(iv)

$\boxed{\alpha = \frac{2Rmg}{4R^2m + I_A} = \frac{2Rmg}{4R^2m + \frac{1}{2}Mr^2 + \frac{3}{2}MR^2}}$

מאחר והתנועה היא ללא החלקה הרי כי

$v_{cm} = \omega R$

$\boxed{a = a_{cm} = \alpha R = \frac{2R^2mg}{4mR^2 + \frac{1}{2}Mr^2 + \frac{3}{2}MR^2}}$

עתה מתוך iii אנו יכולים לדעת את תאוצת המסה מטה:

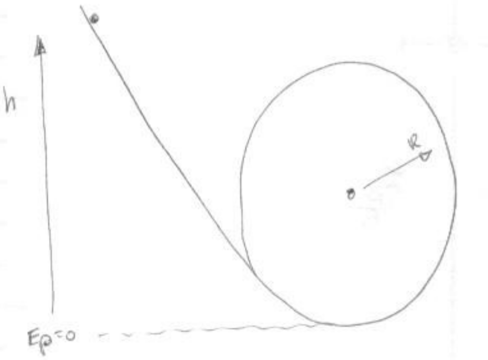
$$\boxed{\ddot{y} = 2R\alpha = \frac{4R^2 mg}{4mR^2 + \frac{1}{2}Mr^2 + \frac{3}{2}MR^2}}$$

והמתיחות תהיה (בעזרת i)

$$T_1 = mg - m\ddot{y} = mg - m\frac{4R^2 mg}{4mR^2+\frac{1}{2}Mr^2+\frac{3}{2}MR^2} = mg\left(1 - \frac{4mR^2}{4mR^2+\frac{1}{2}Mr^2+\frac{3}{2}MR^2}\right) =$$

$$= mg\left(\frac{\frac{1}{2}Mr^2+\frac{3}{2}MR^2}{4mR^2+\frac{1}{2}Mr^2+\frac{3}{2}MR^2}\right) = mgM\left(\frac{r^2+3R^2}{8mR^2+Mr^2+3MR^2}\right)$$

3) א. נבחר את הקרקע כאנרגיה פוטנציאלית אפס. כמו כן נניח כי $r \ll R$ ולכן אין צורך לתקן עבור מיקום מרכז הגלגל.



משקולי אנרגיה:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg2R$$

כאשר אנו מכירים כי עבור הקפה מלאה המהירות בשיא המסלול צריכה להיות: $v^2 = gR$

בהנחה כי אין החלקה: $v = \omega R$

ולכן (כאשר $I = kmr^2$)

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kmr^2\omega^2 + mg2R$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \frac{1}{2}k\cancel{m}v^2 + \cancel{m}g2R$$

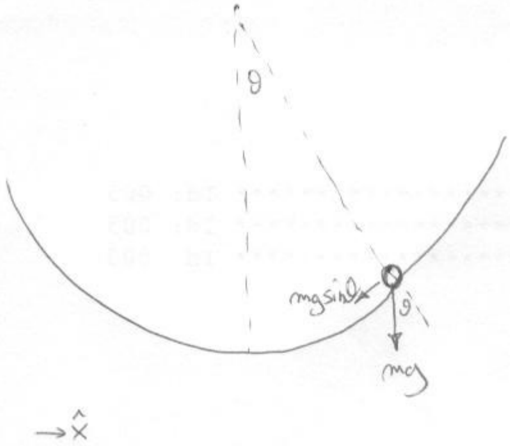
$$\cancel{g}h = \frac{1}{2}\cancel{g}R + \frac{1}{2}k\cancel{g}R + \cancel{g}2R$$

$$\boxed{h = \frac{1}{2}R + 2R + \frac{1}{2}kR = \frac{1}{2}R(5+k)}$$

זהו הגובה המינימלי
שיאפשר לעשות סיבוב.

ב. עבור $k=0$: $\boxed{h = \frac{5}{2}R}$ (התנאי עבור מקרה של גוף נקודתי ללא סיבוב).

עבור $k=1$: $\boxed{h = 3R}$



4) . נסתכל על התנועה מנקודת המבט של הכדור

$$(i)\quad \sum \Gamma = r m g \sin\theta = I\alpha$$

כאשר I הינו

$$I = \underbrace{I_{cm}}_{\text{כדור}} + mr^2 = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2$$

בקירוב של זוויות קטנות ניתן לומר כי התאוצה בכיוון $\hat{x}$ הינה:

$$a = r\alpha$$

מצד שני, מבט על הגלגל :

$$a = -R\ddot{\theta}$$

(הסימן הינו הפוך כי התאוצה היא נגד ההעתק)

ולכן

$$r\alpha = -R\ddot{\theta}$$

את α אני מוציא מ-(i)

$$\alpha = \frac{mgr\sin\theta}{I}$$

$$r\,\frac{mgr\sin\theta}{I} = -R\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgr^2}{IR}\sin\theta = 0$$

כאשר עבור זוויות קטנות $\theta \cong \sin\theta$:

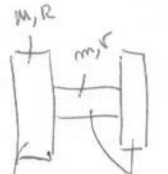
$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{mgr^2}{IR}}_{\omega_0^2}\theta = 0$$

והתדירות הינה

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{IR}{mgr^2}} =$$

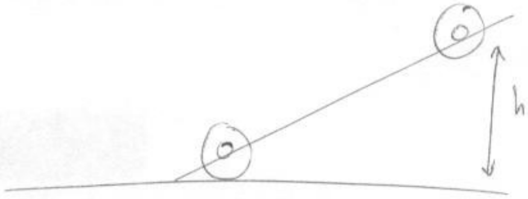
$$= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{7}{5}mr^2 R}{mgr^2}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{7R}{g}}}$$

5) א. ראשית נסתכל על הגוף המתגלגל ונחשב לו את מומנט ההתמד



$I_1 = \frac{1}{2}MR^2 \quad I_2 = \frac{1}{2}mr^2$

$I = 2I_1 + I_2 = MR^2 + \frac{1}{2}mr^2$



משוואות אנרגיה:

$$(2M+m)gh = (2M+m)gR + \frac{1}{2}(2M+m)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

לאורך התנועה: $v_{cm} = r\omega$

$$(2M+m)g(h-R) = \frac{1}{2}(2M+m)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(MR^2+\frac{1}{2}mr^2\right)\frac{v_{cm}^2}{r^2}$$

$$2(2M+m)g(h-R) = \left(2M+m+\frac{MR^2+\frac{1}{2}mr^2}{r^2}\right)v_{cm}^2$$

$$\sqrt{\frac{2gr^2(2M+m)(h-R)}{2Mr^2+mr^2+MR^2+\frac{1}{2}mr^2}} = v_{cm} = \sqrt{\frac{2gr^2(2M+m)(h-R)}{2Mr^2+MR^2+\frac{3}{2}mr^2}}$$

ב. על הקרקע, על מנת שהגוף יתגלגל ללא החלקה צריך להתקיים כי:

$v_{cm} = \omega R$

עתה ברגע המגע אני יודעת כי $\omega = \frac{v_{cm}(\text{בירידה})}{r}$

ולכן: $\omega R = \frac{v_{cm}}{r}R$

מצב שני: $v_{cm} = v_{cm}(\text{בירידה})$

$v_{cm} \neq \omega R$ בתחילת הסיבוב

ג. עתה מתחיל הגוף להחליק כאשר כח החיכוך מאיץ את התנועה הסיבובית ומאיט את התנועה הקווית עד למצב בו $v_{cm}=\omega R$.

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ a &= -\mu g \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \Sigma\tau &= R\mu mg = I\alpha \\ \alpha &= \frac{R\mu mg}{I} \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

כאשר $v=\omega R$ $\longrightarrow \left(\omega_0 + \frac{R\mu mg}{I}\cdot t\right)R = v_0 - \mu gt$

כמו כן ω_0 ו-v_0 הינם:

$v_0 = v_{cm}(\text{בירידה}) = v_1$

$\omega_0 = \frac{v_{cm}}{r} = \frac{v_1}{r}$

$$R\frac{v_1}{r} + \frac{R^2\mu m g}{I}t = v_1 - \mu g t$$

$$\left(\frac{R^2\mu m g}{I} + \mu g\right)t = v_1 - \frac{R}{r}v_1 = v_1\left(1-\frac{R}{r}\right)$$

$$\boxed{t = \frac{v_1\left(1-\frac{R}{r}\right)}{\mu g\left(1+\frac{R^2 m}{I}\right)} = \frac{v_1 I (r-R)}{\mu g r (I + R^2 m)}}$$

$$v_1 = \frac{2 g r^2 (2M+m)(h-R)}{2Mr^2 + MR^2 + \frac{3}{2} m r^2}$$

$$I = MR^2 + \frac{3}{2} m r^2$$