

תרגיל 8 – חדו"א 1 לביוגיה חישובית

שאלה 1

נניח f ו g מונוטוניות עולות. הוכח או הפוך את הסעיפים הבאים:

א. $-f$ מונוטונית יורדת.

ב. $f + g$ מונוטונית עולה.

ג. $f - g$ מונוטונית (עולה או יורדת).

ד. $f \cdot g$ מונוטונית.

הוכח את הסעיף הבא:

הראה שאם f, g מונוטוניות אז גם $f \circ g$ מונוטונית אם ההרכבה $f \circ g$ מוגדרת.

שאלה 2

חשב את הגבולות הבאים ללא שימוש בכלל לופיטל

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ג.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - \cos x}$ ב.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{2x^3 + 10^6 x - 2}$ א.
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$ ו.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$ ה.	$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$ ז.
$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$ ט.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x}$ ח.	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 7x} - x)$ י.
	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)}$ יא.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$ יב.

שאלה 3

א. נתון כי $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ וכי לכל $0 < x < 2$ $|f(x) - g(x)| < 3$. הוכח כי $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

ב. תהיי $f(x) = \begin{cases} ax+2 & x < 1 \\ 3 & x = 1 \\ 3x+2a & x > 1 \end{cases}$ כמו כן קיים $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. מהו a ? מהו הגבול?

ג. מצא a, b כך ש $f(x) = \begin{cases} ax+b & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ b(x+1)^2 & x > 1 \end{cases}$ תהייה רציפה בכל \mathbb{R} .

שאלה 4

א. תהיי f רציפה ב $[0, a]$ וכן $f(0) = f(a)$. הראה כי יש $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ כך ש

$$f(x) = f\left(x + \frac{a}{2}\right)$$

ב. הראה כי למשוואה $x = \tan x$ יש אינסוף פתרונות ב \mathbb{R} .

שאלה 5

תהיי $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ רציפה.

א. הראה כי יש $0 \leq x_0 \leq 1$ כך ש $f(x_0) = x_0$.

ב. הראה שאין בהכרח $0 \leq x_0 \leq 1$ כך ש $f(x_0) = \frac{x_0}{2}$.

ג. האם סעיף א נכון אם נחליף $[0,1]$ ב $(0,1)$?