פיתרון תרגיל בית 5 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ו

3 באפריל 2016

1. יהיו $k,m,n \in \mathbb{N}$ כך ש $0 \le k \le m \le n$ הוכיחו:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

א. בדרך אלגברית.

ב. בדרך קומבינטורית.

פיתרון

א. נפתח את שני הצדדים ונראה שמגיעים לאותו דבר:

נפתח את צד שמאל ונקבל (ע"י צמצום $k!$ מהמונה והמכנה): $\frac{n!}{m!\cdot(n-k)!\cdot(k-m)!} = \frac{k!}{m!(k-m)!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}\binom{k}{m}$.

נפתח את צד ימין ונקבל (ע"י צמצום $(n-m)!$ מהמונה והמכנה): $\frac{n!}{m!\cdot(n-k)!\cdot(k-m)!} = \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$.

ב. שני אגפי הזהות סופרים בכמה דרכים ניתן לבחור מתוך קבוצה של n סטודנטים k סטודנטים למועצה ומתוך k הסטודנטים במועצה הכללית לבחור m סטודנטים לועד העליון (אפשר להמחיש גם עם ממשלה ואחר כך קבינט מצומצם). אגף שמאל ברור - מספר האפשרויות לבחור את הועד, ולכל בחירה של ועד (ולכן זה כפל) יש את מספר האפשרויות לבחור מתוכו את הועד העליון. באגף ימין קודם בוחרים את m הסטודנטים לועד העליון, ולכל אפשרות כזו (ולכן יש כפל) משלימים מתוך $n-m$ הסטודנטים שנותרו את החברים במועצה הכללית.

2. יהיו $k,n \in \mathbb{N}$ כך ש $0 \le k \le n$ הוכיחו בדרך אלגברית:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

פיתרון:

נציב, בנוסחת הבינום של ניוטון, $a=1, b=-1$ (או להיפך) וזה בדיוק מה שנקבל.

3. יהיו $k,n,m\in\mathbb{N}$ כך ש $0\le k\le n,m$ הוכיחו בדרך קומבינטורית:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

פיתרון:

שני הצדדים סופרים את מספר האפשרויות לבחור k איברים מקבוצה בת $n+m$ איברים. אגף ימין ברור. אגף שמאל: כל תת קבוצה בגודל k מקבוצה בגודל $n+m$ מכילה איברים מ־n האיברים הראשונים, ובנוסף איברים מ־$n+1$ עד $n+m$ האיברים האחרונים. אם היא מכילה i איברים מתוך n הראשונים, אז בהכרח היא מכילה $k-i$ איברים מתוך האחרונים. לכל $0\le i\le k$ ספציפי, יש $\binom{n}{i}$ אפשרויות של תתי קבוצות בגודל i מ־n האיברים הראשונים, ולכל אפשרות כזו יש $\binom{m}{k-i}$ אפשרויות לשאר האיברים מתוך שאר האיברים האחרונים. כיון שמתוך n הראשונים יכולים להיבחר בין 0 ל־k איברים, לכן צריך לסכום על כל האפשרויות הנ"ל בין 0 ל־k.

4. יהיו $k,m,n\in\mathbb{N}$ כך ש $k+m\le n$ הוכיחו:

$$\binom{n}{k+m}\le\binom{n}{k}\cdot\binom{n-k}{m}$$

א. בדרך אלגברית.

ב. בדרך קומבינטורית.

פיתרון:

א. נשים לב ש־ $\binom{n}{k+m}=\frac{n!}{(k+m)!(n-k-m)!}$, ומאידך $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{m!(n-k-m)!}=\frac{n!}{k!m!(n-k-m)!}$. לכן, מספקי להוכיח ש־ $k!m!\le(k+m)!$. נוכיח באינדוקציה:

נשתמש כאן ביחס סדר $\preceq$ (קטן שווה מיוחד) על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ המוגדר לפי $(i,j)\preceq(k,m)\iff i\le k\wedge j\le m$ ונעשה לפיו את האינדוקציה (כלומר הנחת האינדוקציה תהיה נכונות הטענה לכל הזוגות הסדורים הקטנים שווים, לפי יחס זה, מ־ (k,m)). בסיס האינדוקציה הוא $k=m=1$, ואכן מתקיים $1!\cdot1!=1\le2=(1+1)!$. נניח נכונות לכל הזוגות הקטנים מ־$(k,m)>(0,0)$ ונראה נכונות עבור זוג זה. אכן:

$$k!m!=k\cdot m\cdot(k-1)!(m-1)!\overset{*}{\le}k\cdot m(k+m-2)!=\frac{k\cdot m}{(k+m-1)(k+m)}\cdot(k+m)!\overset{**}{\le}(k+m)!$$

כאשר באי שיוויון $*$ השתמשנו בהנחת האינדוקציה, ובאי שיוויון $**$ השתמשנו בכך ש־

$$\frac{k\cdot m}{(k+m-1)(k+m)}=\frac{k\cdot m}{k\cdot m+k^2-k+m(k-1)}\le1$$

כי $k^2-k\ge0$, ובנוסף $m(k-1)\ge0$ ולכן המכנה גדול שווה המונה. (אני מניח כאן ש $k,m>0$ אמנם צריך להתייחס גם למקרים בהם אחד מהם שווה לאפס, אבל אז מקבלים שיוויון באי שיוויון הנ"ל, ולכן הוא מתקיים).

ב. נסביר זאת ע"י בחירת סטודנטים למחלקה להנדסה: בצד שמאל אנו סופרים את מספר האפשרויות לקבל $k+m$ סטודנטים מתוך n מבקשים. צד ימין סופר את מספר האפשרויות לקבל k סטודנטים להנדסת מחשבים, ובנוסף עוד m מהנותרים לחשמל.

כל בחירה כזו מתאימה לבחירה של $k+m$ סטודנטים למחלקה באופן כללי, אבל נשים לב שבצד ימין יכולות להיות יותר אפשרויות, כי קבלת משה למחשבים ודוד לחשמל שונה כאן מבחירת דוד למחשבים ומשה לחשמל, בעוד כבחירתם למחלקה באופן כללי זו אותה בחירה. ניתן לפרמל זאת ע"י הגדרת פונקציה **על** מצד ימין לשמאל באופן שהפונקציה מקבלת זוג סדור (A,B) (A זה קבוצת המתקבלים למחשבים, B לחשמל) ומחזירה $A\cup B$ המבטא את קבוצת הסטודנטים שהתקבלו למחלקה.