תרגיל בית 7 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשע"ח

שאלה 1 (חזרה). עברו על הבוחן וודאו שאתם יודעים לפתור אותו. זה חשוב במיוחד למי שלא ניגש אליו.

שאלה 2. יהי F שדה. הוכיחו שהחוג הבא (לגבי חיבור וכפל מטריצות) הוא מקומי:

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in F \right\}$$

שאלה 3. יהי $D \in \mathbb{Z}$. הוכיחו ששדה השברים של $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ הוא $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$.

שאלה 4. יהי תחום שלמות R עם שדה שברים F. אז R נקרא תחום הערכה אם לכל $x \in F^\times$ מתקיים $x \in R$ או $x^{-1} \in R$.

א. הוכיחו שכל תחום הערכה הוא חוג מקומי.

ב. הוכיחו כי R הוא תחום הערכה אם ורק אם האידאלים שלו מסודרים בשרשרת (כלומר אם $I, J \lhd R$, אז $I \subseteq J$ או $J \subseteq I$).
רמז: בכיוון אחד הניחו בה"כ כי קיים $r \in I \setminus J$. בכיוון השני הזכרו שאם $x \in F^\times$, אז $x = ab^{-1}$ עבור $a, b \in R \setminus \{0\}$ והסתכלו על האידאלים הראשיים שנוצרים על ידי a ו-b.

שאלה 5. לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right] = S^{-1}\mathbb{Z}$ כאשר $S = \left\{ n^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$ בדומה למה שעשינו בכיתה. יהי p מספר ראשוני.

א. הוכיחו שלא קיים חוג $\mathbb{Z} \subsetneq R \subsetneq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ המוכל ממש בין החוגים.

ב. הוכיחו שאם $m|n$, אז $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{m}\right] \subseteq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$. הוכיחו שאם $n \nmid m^k$ לכל $k \in \mathbb{N}$, אז זו הכלה ממש.

ג. מצאו סדרת מספרים $n_1, n_2, n_3, \ldots$ כך שתהיה הכלה ממש בשרשרת החוגים

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n_1}\right] \subsetneq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n_2}\right] \subsetneq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n_3}\right] \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbb{Q}$$

שאלה 6. יהיו $x, y \in \mathcal{O}_D$ איברים בחוג שלמים ריבועיים.

א. הוכיחו שאם $x \sim y$ אז $N(x) = \pm N(y)$.

ב. מצאו D ואיברים x, y המקיימים $N(x) = N(y)$, אבל הם לא חברים ולא צמודים זה לזה.

שאלה 7. העשרה: קראו את המאמר "חוגי שברים בדרך הקשה" מאת ז'וזה פליפה ולוש ובדקו שזה למעשה יותר קל.

בהצלחה!