<u>אלגברה מופשטת 2 – תרגול 6</u>

<u>אידאלים ראשוניים</u>

הגדרה: $R \neq I \triangleleft R$ ייקרא **ראשוני** אם לכל שני אידיאלים $A,B \triangleleft R$ כך ש $AB \subseteq I$ אזי $A \subseteq I$ או $B \subseteq I$.

הערה: עבור חוגים קומוטטיביים זה שקול לומר כי לכל $a,b \in R$, אם $ab \in I$ אזי $a \in I$ או $b \in I$.

אולם, בחוגים לא קומוטטיביים התנאי הזה חזק יותר מהראשוניות. למשל, אם D חוג עם חילוק אזי $M_2(D)$ חוג פשוט ולכן $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \triangleleft M_2(D)$ הוא ראשוני. אבל, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ מבלי שאף אחת משתי המטריצות משמאל נמצאת באידיאל.

תרגיל: הראו שבחוג פשוט אידאל האפס הוא תמיד ראשוני.

פתרון: ברור מההגדרה.

תרגיל: יהי $C(\mathbb{R})$ חוג הפונקציות הממשיות הרציפות. הראו ש $I = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$ הוא אידאל ראשוני.

פתרון: נניח ש $f(x)g(x) \in I$ אזי $f(0)g(0) = 0$, אך כיוון ש $\mathbb{R}$ תחום שלמות נקבל $f(0) = 0$ או $g(0) = 0$, כלומר $f \in C(\mathbb{R})$ או $g \in C(\mathbb{R})$ כנדרש.

משפטים:

1. יהי R חוג קומוטטיבי עם יחידה. הוכח כי R תחום שלמות אם ורק אם $\{0\}$ הוא אידיאל ראשוני.
2. אם R חוג אזי $I \triangleleft R$ ראשוני אם ורק אם $\{0\}$ הוא אידיאל ראשוני ב R/I.
3. אם R קומוטטיבי אזי $R \neq I \triangleleft R$ ראשוני אם ורק אם R/I תחום שלמות.

דוגמאות:

1. $<x>$ אידיאל ראשוני ב $\mathbb{Z}[x]$ משום ש $\mathbb{Z}[x]/<x> \cong \mathbb{Z}$ הוא תחום שלמות.

2. $<x>$ איננו ראשוני ב $\mathbb{Z}_4[x]$ משום ש $\mathbb{Z}_4[x]/<x>\cong\mathbb{Z}_4$ איננו תחום שלמות.

תרגיל: יהי R חוג קומוטטיבי ו $R\neq I\lhd R$ אידיאל. הוכח כי I ראשוני אם ורק אם $R\setminus I$ סגורה לכפל.

הוכחה:

=> נניח בשלילה כי קיימים $a,b\in R\setminus I$ כך ש $ab\notin R\setminus I$. אזי $ab\in I$ ומכיוון שהוא ראשוני, $a\in I$ או $b\in I$. משמע, $a\notin R\setminus I$ או $b\notin R\setminus I$ וזו סתירה.

<= נניח ש $ab\in I$ אבל $a,b\notin I$ אזי $a,b\in R\setminus I$ ולכן $ab\in R\setminus I$ סתירה.

תרגיל: יהיה R חוג קומוטטיבי עם יחידה שבו כל האידיאלים הם ראשוניים. צריך להוכיח כי הוא שדה.

הוכחה: נתון ש$\{0\}$ ראשוני ולכן R תחום שלמות. יהי איבר $0\neq x\in R$. נביט באידיאל $<x^2>$. הוא ראשוני מהנתון ולכן $x\in<x^2>$, משמע קיים $a\in R$ כך ש $x=ax^2$. לכן $x(ax-1)=0$, ומכיוון ש R תחום שלמות ו$x\neq 0$, $ax=1$, משמע x הפיך ולכן R שדה.

תרגיל: יהי הומומורפיזם $f:R\to S$ של חוגים קומוטטיביים ויהי $I\lhd S$ ראשוני. הוכח כי $f^{-1}(I)$ ראשוני.

הוכחה: [פשוטה. נשאיר לבית.]

תרגיל: הוכח או הפרך: אם I מקסימלי אזי $f^{-1}(I)$ מקסימלי.

פתרון: נפריך. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ הומ' ההכלה. $f^{-1}(\{0\})=\{0\}$.

הערה: אם $I,J\lhd R$ רשאוניים אזי $I\cap J$ לאו דוקא ראשוני. למשל $R=\mathbb{Z}$, $I=2\mathbb{Z}$ ו $J=3\mathbb{Z}$. במקרה הזה $I\cap J=6\mathbb{Z}$ שאיננו ראשוני.

שאלה: האם בהכרח גרעין של הומ' (שאינו הומ' ה 0) הוא אידאל ראשוני?

תשובה: לא. ראינו ש $\mathbb{Z}_4[x]/<x>\cong\mathbb{Z}_4$ שאינו תחום שלמות, אך $<x>$ הוא הגרעין של העתקת המנה.

טענה: בחוג קומוטטיבי R עם יחידה, כל אידיאל מקסימלי הוא ראשוני.

הוכחה: יהי $I\triangleleft R$ מקסימלי, אזי R/I שדה, ולכן R/I תחום שלמות ולכן I ראשוני.

(בהאפשר הזמן)

הכללה: בחוג לאו דוקא קומוטטיבי עם יחידה, כל אידיאל מקסימלי הוא ראשוני.

הוכחה: נניח בשלילה כי קיים $I\triangleleft R$ מקסימלי לא ראשוני, אז קיימים $A,B\triangleleft R$ כך ש $AB\subseteq I$ אך $A,B\not\subseteq I$. כעת, מצד אחד $(A+I)(B+I)\subseteq I$ [חישוב פשוט] ומאידך $A+I=B+I=R$ [בגלל מקסימליות] ולכן $R\cdot R\subseteq I$. זה אומר שהיחידה נמצאת ב I, ולכן $I=R$, סתירה.

הערה: אידאל מקסימלי בחוג לא קומוטטיבי הוא לאו דווקא ראשוני. לדוגמה בחוג המטריצות $M_2(D)$ אידאל האפס הוא ראשוני ומקסימלי.

הערה: אם לא מניחים שיש יחידה אז הטענה איננה נכונה. למשל ל $R=2\mathbb{Z}$ יש אידיאל מקסימלי $I=4\mathbb{Z}$ כך ש $R\cdot R\subseteq I$.

תרגיל: יהי A חוג קומ'. אם לכל $x\in A$ קיים $n>1$ כך ש $x^n=x$ אזי כל אידאל ראשוני הוא מקסימלי.

פתרון: יהיו $M,P\triangleleft A$ אידאלים כך ש P ראשוני, M מקסימלי כך ש $P\subset M$. יהי $x\in M\setminus P$ אזי $x^n=x$ עבור $n>1$. אם כך $x(x^{n-1}-1)=x^n-x=0\in P$ ולכן בהכרח $x^{n-1}-1\in P\subset M$, ולכן $x^{n-1},x^{n-1}-1\in M$ ואם כך $1\in M$, סתירה.

תרגיל: הראו שבקבוצת האידאלים הראשוניים של חוג קומ' יש איברים מינימליים ביחס להכלה.

פתרון: (הדרכה) יש להראות שהחיתוך של כל שרשרת הוא אידאל ראשוני, ואז ניתן להשתמש בלמה של זורן.

<u>חוגים ראשוניים:</u>

הגדרה: חוג R נקרא ***ראשוני*** אם לכל שני אידאלים $A,B \triangleleft R$ מתקיים $AB=0 \Rightarrow A=0 \ \vee \ B=0$.

משפטים:

א. R ראשונים אם ורק אם לכל $0 \neq a,b \in R$ קיים $0 \neq x \in R$ כך ש $axb \neq 0$.
ב. כל תחום הוא ראשוני
ג. יהי R חוג קומוטטיבי. R הוא ראשוני אם ורק אם הוא תחום שלמות.

תרגיל: המרכז של חוג ראשוני הוא תחום שלמות.

פתרון: יהי R ראשוני. אם נוכיח ש $Z(R)$ ראשוני, נקבל את הדרוש לפי ג. יהיו $A,B \triangleleft Z(R)$ כך ש $AB=0$. אזי $AR,BR \triangleleft R$, ומתקיים $ARBR=ABR=0$ לכן $AR=0 \vee BR=0$, ומכאן ניתן להסיק ש $A=0 \vee B=0$.

תרגיל: $\left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2(F)$ (כאשר F שדה) הוא תת-חוג של חוג פשוט שאינו ראשוני.

פתרון: תת-חוג של חוג פשוט -- תרגיל בית. מספיק למצוא שני אידאלים שונים מאפס שמכפלתם היא 0. $J=\left\{\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}, I=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}\right\}$.

תרגיל: *(מבחן 2007 מועד א)* חוג R נקרא ***ראשוני למחצה*** אם לא קיים אידיאל $0 \neq I \triangleleft R$ כך ש $I^2=0$. אידיאל P בחוג כלשהו R נקרא ראשוני למחצה אם R/P הוא חוג ראשוני למחצה.

א. הוכח כי כל אידאל ראשוני הוא אידאל ראשוני למחצה.
ב. הוכח כי P ראשוני למחצה אם ורק אם לכל אידאל $I \triangleleft R$, אם $I^2 \subseteq P$ אז $I \subseteq P$.

הוכחה: קל לראות ש ב=>א. נוכיח את סעיף ב:

נביט בהעתקה הטבעית $f: R \to R/P$.

נניח כי P לא ראשוני למחצה, אזי R/P לא ראשוני למחצה, ולכן קיים $0 \neq I \triangleleft R/P$ כך ש $I^2 = 0$. האידיאל $f^{-1}(I) \triangleleft R$ מקיים $(f^{-1}(I))^2 \subseteq P$ אך $f^{-1}(I) \not\subseteq P$.

זה מוכיח את הכיוון ההפוך.

נניח כרגע כי קיים $J \triangleleft R$ כך ש $J^2 \subseteq P$ וגם $J \not\subseteq P$. אזי האידיאל $f(J) \triangleleft R/P$ מקיים $(f(J))^2 = 0$ אך $f(J) \neq 0$ ולכן R/P לא ראשוני למחצה ולכן P לא ראשוני למחצה. זה מוכיח את הכיוון הישיר.