

שיעורי בית 7

2 בינואר 2016

1. תהא G חבורה סופית. נסמן ב \sim את יחס הצמידות.

(א) יהא $x \in G$, ונסמן $H = C(x) = \{g \in G : gx = xg\}$ המרכז של x . נגדיר יחס שקילות נוסף על G :

$$g_1 \equiv g_2 \iff g_1^{-1}g_2 \in H$$

הוכח כי גודל קבוצת המנה שווה לגודל מחלקת הצמידות של x . כלומר

$$|G/\equiv| = |[x]_{\sim}|$$

הדרכה: הראו שניתן להגדיר פונקציה

$$f : G/\equiv \rightarrow [x]_{\sim}$$

ע"י

$$\forall [g]_{\equiv} \in G/\equiv : f([g]_{\equiv}) = gxg^{-1}$$

ושפונקציה זאת חח"ע ועל.

פתרון: מוגדרות f . נניח $[g_1]_{\equiv} = [g_2]_{\equiv}$ צ"ל כי $[g_1]_{2\equiv} = [g_2]_{2\equiv}$ כלומר $f([g_1]_{\equiv}) = f([g_2]_{\equiv})$ כלומר $g_1xg_1^{-1} = g_2xg_2^{-1}$ מהנתון נקבל כי $g_1xg_1^{-1} = g_2xg_2^{-1}$ ואז $g_1^{-1}g_2x = xg_1^{-1}g_2$ כלומר

$$g_1xg_1^{-1} = g_1(xg_1^{-1}g_2)g_2^{-1} = g_1(g_1^{-1}g_2x)g_2^{-1} = g_2xg_2^{-1}$$

בנוסף ברור כי $gxg^{-1} \in [x]_{\sim}$ לפי הגדרת מחלקת שקילות.

טענה f חח"ע. הוכחה נניח $[g_1]_{\equiv} = [g_2]_{\equiv}$ צ"ל $f([g_1]_{\equiv}) = f([g_2]_{\equiv})$. מהנתון נסיק כי $g_1xg_1^{-1} = g_2xg_2^{-1}$. ע"י הכפלה ב g_1^{-1} משמאל ו g_2 מימין נקבל כי $xg_1^{-1}g_2 = g_1^{-1}g_2x$ כלומר $g_1^{-1}g_2 \in H$ שזה גורר $g_1 \equiv g_2$ שזה שקול ל $[g_1]_{\equiv} = [g_2]_{\equiv}$.

טענה: f על. הוכחה: יהא $y \in [x]_{\sim}$ צריך למצוא לו מקור. מהגדרת מחלקת שקילות $y = gxg^{-1} \in G$ עבור $g \in G$. אזי מתקיים $f([g]_{\equiv}) = gxg^{-1} = y$ וסיימנו.

(ב) השתמשו בסעיף הקודם להסיק כי גודל מחלקת צמידות מחלק את גודל החבורה. כלומר לכל $x \in G$ מתקיים

$$|G| = k |[x]_{\sim}|$$

עבור k שלם כלשהוא.

פתרון: לפי משפט לגרנז' וסעיף קודם נקבל כי

$$\frac{|G|}{|H|} = |G/H| = |[x]_{\sim}|$$

ואז

$$|G| = |H| \cdot |[x]_{\sim}|$$

וסיימנו.

2. תהא G חבורה עם p^n איברים (p מספר ראשוני, n מספר טבעי) הוכיחו כי במרכז של G קיים יותר מאיבר אחד (כמובן שהאיבר הנטרלי תמיד שייך למרכז...) כלומר

$$|Z(G)| > 1$$

הדרכה: השתמשו בכך ש

(א) G היא איחוד זר של מחלקות צמידות. (ומה גודל מחלקת שקילות של איבר במרכז?)

(ב) בשאלה הקודמת

(ג) בחבורה \mathbb{Z}_p (שקילות מספרים שלמים מודולו p)

פתרון: לפי תכונה של יחס שקילות, G היא איחוד זר של מחלקות השקילות שלה. כלומר

$$G = \bigcup_{x \in G} [x]_{\sim}$$

ואם נבטל "כפילויות" נקבל איחוד זר. כלומר

$$G = \bigsqcup_{A \in G/\sim} A$$

ולכן

$$|G| = \sum_{A \in G/\sim} |A|$$

במילים: הגודל של G שווה לסכום גודלי מחלקות השקילות (הזרות).

קעת לכל $x \in Z(G)$ מתקיים כי $[x]_{\sim} = \{x\}$

$$|G| = \sum_{A \in G/\sim} |A| = \sum_{|A|=1} |A| + \sum_{|A|>1} |A| = |Z(G)| + \sum_{|A|>1} |A|$$

קעת, כל מחלקת צמידות A מקיימת כי $|A| = p^k$ עבור $0 \leq k \leq n$ (לפי סעיף קודם, גודל מחלקת צמידות מחלקת את גודל החבורה).

בנוסף לכל מחלקת צמידות A עם יותר מאיבר אחד מתקיים כי $|A| = p^k$ עבור $1 \leq k \leq n$ ולכן מודולו p מתקיים כי $|A| \equiv 0 \pmod{p}$ ולכן

$$|Z(G)| = |G| - \sum_{|A|>1} |A| = p^n - \sum_{k=1}^n \alpha_k p^k$$

כאשר α_k זה מספר מחלקות הצמידות מגודל p^k . ולכן מודולו p נקבל כי

$$|Z(G)| \equiv 0 \pmod{p}$$

ולכן $|Z(G)| = p^l$ עבור $l > 0$ או $|Z(G)| = 0$. כיוון ש $|Z(G)| > 0$ כי איבר היחידה שייך למרכז, נקבל כי גודל המרכז הוא $|Z(G)| = p^l$ עבור $l > 0$. כלומר במרכז יש לפחות p איברים.

3. תהא G חבורה סופית. H תת חבורה של G ו K תת חבורה של H . הוכח כי

$$|G/K| = |G/H| \cdot |H/K|$$

פתרון: נתוןמשפט לגרנז

$$|G/K| = \frac{|G|}{|K|} = \frac{|G|}{|H|} \cdot \frac{|H|}{|K|} = |G/H| \cdot |H/K|$$

.4

(א) תהא G חבורה. יהא $g \in G$ מסדר n (n טבעי). יהא $n = ab$ פירוק של המספר

n . הוכח כי הסדר של g^a הוא b

פתרון: נתון כי $g^n = e$ ובנוסף, לכל $0 < m < n$ מתקיים $g^m \neq e$. נסמן

$$h = g^a \quad \text{צ"ל } o(h) = n$$

מתקיים $h^b = (g^a)^b = g^{ab} = g^n = e$ ולכן $o(h) \leq n$. נניח בשלילה כי

$$m = o(h) < n$$

אזי $e = h^m = (g^a)^m = g^{am} = g^{am} = g^{am}$ אבל $am < ab = n$ סתירה לנתון.

(ב) טענה: תהא G חבורה בת p^n איברים (כאשר p מספר ראשוני ו n מספר טבעי). הוכח כי קיים $g \in G$ מסדר p . (רמז: ניתן להוכיח טענה זאת באינדוקציה).
פתרון: עבור $n = 1$. יש p איברים ואז לפי משפט מההרצאה קיים לה יוצר והוא מסדר p .

כעת נניח שלכל חבורה מסדר p^m $0 < m < n$ קיים איבר מסדר p . נוכיח כי גם לחבורה בסדר p^n יש איבר מסדר p .

יהא $e \neq g \in G$ אזי הסדר שלו מחלק את p^n . אם הסדר שלו הוא p^n אזי לפי התרגיל הקודם $h = g^{p^{n-1}}$ מסדר p .

אחרת הסדר שלו p^m כאשר $0 < m < n$ ולכן סדר החבורה $\langle g \rangle$ הוא p^m לפי הנחת האינדוקציה יש $h \in \langle g \rangle$ מסדר p .

.5

(א) תהא G חבורה. H תת חבורה. הוכח כי מספר הקוסטים השמאליים שווה למספר הקוסטים הימניים.

כלומר הקבוצות $K_1 = \{gH \mid g \in G\}$ $K_2 = \{Hg \mid g \in G\}$ בעלות עוצמה שווה. (הדרכה: הגדר $\phi : K_1 \rightarrow K_2$ ע"י $\phi(gH) = Hg^{-1}$. הוכח כי ϕ מוגדרת היטב, חח"ע ועל).

פתרון: טענה ϕ מוגדרת היטב

הוכחה: נניח $g_1H = g_2H$ צ"ל כי $\phi(g_1H) = \phi(g_2H)$ $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$ $Hg_1^{-1}g_1 = Hg_2^{-1}g_1$ $g_1 \in H$ $g_2^{-1}g_1 \in H$ $g_1H = g_2H$ אז גם ההופכי $(g_2^{-1}g_1)^{-1} = g_1^{-1}g_2 \in H$ $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$ ואז $\phi(g_1H) = \phi(g_2H)$.

חח"ע: נניח $\phi(g_1H) = \phi(g_2H)$ צ"ל $g_1H = g_2H$ מהנחה $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$ כלומר $g_1^{-1}g_2 \in H$ כמו מקודם, H תת חבורה ולכן גם ההופכי $g_1H = g_2H$ ואז $g_2^{-1}g_1 \in H$ $g_1H = g_2H$ על: יהא $Hg \in K_2$ המקור שלו יהיה $g^{-1}H \in K_1$

(ב) תהא G חבורה. H ת"ח. הוכח כי אם הסדר של G/H הוא 2 אז מתקיים כי

$$\forall g \in G : gH = Hg$$

פתרון: יהא $g \in G$ צ"ל $gH = Hg$. אם $g \in G$ אזי $gH = H = Hg$

אחרת $g \notin H$ ואז $gH \neq H$ (כי יש רק 2 אברים בקבוצת המנה). מתרגיל קודם נסיק כי גם מספר הקוסטים הימניים הוא 2. כיוון ש Hg קוסט ימני שונה מ H נקבל כי $gH = G \setminus H = Hg$