

**בחינת סיום (מועד א') בקורס**  
**מבנים אלגבריים להנדסה (83218)**  
 מרצה: פרופ' נתן קלר

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

נא לענות על 4 מתוך 5 השאלות. בכל שאלה, סעיף א' שווה 15 נקודות וסעיף ב' שווה 10 נקודות.  
 חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון בלבד.

בהצלחה!

שאלה 1

א. יהי  $f$  הומומורפיזם מחבורת התמורות  $S_3$  לחבורה החיבורית  $Z_{5779}$ . הוכיחו כי לכל  $s \in S_3$  מתקיים  $f(s) = 0$ .

ב. תהי  $G$  חבורה קומוטטיבית,  $H$  חבורה, ונניח שקיים הומומורפיזם  $f: G \rightarrow H$  שאיננו טריוויאלי (כלומר, לא מעתיק את כל האיברים של  $G$  לאיבר היחידה של  $H$ ). האם נובע מכך בהכרח ש- $H$  קומוטטיבית? הוכיחו או תנו דוגמא נגדית.

שאלה 2

א. תהי  $G$  חבורה בת 84 איברים ותהיינה  $H_1, H_2$  תתי חבורות שלה. הוכיחו כי אם  $|H_1| = 28$  ו- $|H_2| = 12$  אז  $H_1 \cap H_2$  היא קומוטטיבית.

ב. תנו דוגמא לחבורה אינסופית  $G$  כך שלכל מספר טבעי  $n$ , יש ל- $G$  תת חבורה בת  $n$  איברים.

שאלה 3

א. נסמן  $p(x) = x^7 - 1$  ו- $q(x) = x^6 - 1$ . מצאו את הפולינום בעל המעלה הנמוכה ביותר (מוקדם מוביל 1) אותו ניתן להציג בצורה  $a(x)p(x) + b(x)q(x)$  עבור פולינומים  $a(x), b(x)$  (כלומר, קיימים  $a(x), b(x)$  שבעזרתם ניתן להציג אותו כך).

ב. תנו דוגמא לשני תתי חוג  $A, B$  של חוג הפולינומים כך ש- $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$  איננו תת חוג.

שאלה 4

א. הוכיחו כי אם  $R$  הוא חוג קומוטטיבי ו- $a, b \in R$  הם איברים נילפוטנטיים, אזי גם  $a \cdot b$  נילפוטנטי.

ב. תנו דוגמא לחוג לא קומוטטיבי בו טענת סעיף א' אינה מתקיימת. (דוגמא צריכה לכלול את תיאור החוג והאיברים  $a, b$  וכן הסבר למה הם נילפוטנטיים ולמה מכפלתם אינה נילפוטנטית).

שאלה 5

א. יהי  $F$  שדה סופי בו מתקיים  $1 + 1 = 0$ , כאשר 1 הוא היחידה הכפלית ו-0 הוא היחידה החיבורית. הוכיחו כי כל איבר בשדה זה הינו ריבוע. כלומר, לכל  $x \in F$  קיים  $y \in F$  כך ש- $y^2 = x$ .

ב. תנו דוגמא לשדה עם יותר משני איברים בו מתקיים התנאי של סעיף א'. (דוגמא צריכה לכלול את איברי השדה ואת תיאור הפעולות שבו).