פונקציות מרוכבות – פתרון תרגיל 9

1. $f(z)=\frac{1}{z^2}\frac{1}{z-2}$. נפתח את $\frac{1}{z^2}$ בלבד.

א. נשתמש בפיתוח הנדסי בטבעת $|z-2|>2$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-2+2}=\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{2}{z-2}}=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n (z-2)^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n (z-2)^{-n-1}.$$

נגזור לקבל $-\frac{1}{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}-(n+1)(-2)^n (z-2)^{-n-2}$. מכאן $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-2)^n(z-2)^{-n-3}$

ב. נשתמש בפיתוח הנדסי בטבעת $0<|z-2|<2$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-2+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^n$$ נגזור לקבל

$-\frac{1}{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^{n-1}$. מכאן $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-1)^{n-1}}{2^{n+1}}(z-2)^{n-2}$.

2.

א. $g(z)=z^3e^{-1/z^2}=z^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{-2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{-2n+3}$.

ב. השארית מתקבלת כאשר $n=2$, והיא $\frac{1}{2}$.

3. החלק העיקרי הוא $-\frac{i}{12e^3}(z-3i)^{-2}+\frac{1}{12e^3}(z-3i)^{-1}$

4.

א. ייתכן, למשל עבור $f(z)=z$.

ב. לא ייתכן. בגלל שיש לפונקציה רק חזקות אי שליליות היא אנליטית, מכאן שלפונקציה $\frac{1}{f(z)}$ לא יכולות להיות אינסוף חזקות שליליות בפיתוח (סינגולריות עיקרית) כי קיים הגבול $\lim_{z\to 0}\frac{1}{f(z)}$ (לפחות במובן הרחב).