מבני נתונים ואלגוריתמים - הרצאה 23

24 בינואר 2012

עקרונות התכנון הדינמי

- אחסון תתי פתרונות
- 2 שלבים לפתרון:

1. בניית מרחב כל תתי הפתרונות
2. חזרה אחורנית ובחירת פתרון אופטימלי

- תיאור רקורסיבי של הבעיה

בעיית ה$knapsack$ ללא חזרות

יש חפצים בשווי v_i שלכל אחד יש עלות s_i. מה מקסימום הערכים שאפשר להכניס לתיק בגודל L?
נסמן $M\left(k,\,L\right)$ מקס' של עצמים $1,\,..,\,k$ שאפשר להכניס לתיק בגודל L.

$$
\begin{aligned}
M\left(k+1,\,L\right) &= \max\left(M\left(k,\,L\right),\,M\left(k,\,L-s_{k+1}\right)+v_{k+1}\right)\\
M\left(0,\,L\right) &= 0\\
M\left(k,\,0\right) &= 0
\end{aligned}
$$

לא צריך את הנוסחה ל$M\left(k,\,L+1\right)$, כי אפשר להתקדם רק בשורות (כלומר בkים) לכל גודל אפשרי אחד אחרי השני וכך נגיע לסוף.

בעיות תכנון לינארי - סימפלקס

יש לנו בעיה

$$
\begin{aligned}
\max\ \sum c_ix_i & \\
\sum a_{ij}x_i &\le b_j\\
j &= 1..k\\
x_i &\ge 0
\end{aligned}
$$

הפכנו את האילוצים לשוויונות:

$$\sum a_{ij}x_i+w_j=b_j$$

ואז:

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}A & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\w\end{bmatrix}=\bar{b}$$

למשל:

$$
\begin{aligned}
\max\ \ 2x_1+x_2+x_3 & \\
x_1-x_2+5x_3 &\le 10\\
8x_1+2x_2+3x_3 &\le 15
\end{aligned}
$$

אזי המטריצות יהיו:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

תחום ההגדרה של בעיה הוא התחום שבו מתקיימים האילוצים.
יש כמה אפשרויות:

1. תחום ההגדרה ריק - אין פתרון.
2. תחום ההגדרה לא ריק.
   (א) הפתרון הוא אינסופי.
   (ב) הפתרון סופי.

הבחירה בין 1 ל2 תלויה רק באילוצים.
הבחירה בין a לb תלויה גם בפונק' המטרה עצמה.
נשים לב שהפתרון יכול להיות רק בקדקדי התחום - לא בתוכו וגם לא בשפתו שהיא לא קדקד. זה קורה כי הפונק' לינארית והמקסימום של פונק' בתחום סגור נמצא או בקצה או במקום בו הנגזרת מתאפסת, אך הנגזרת לא מתאפסת כי זו פונק' לינארית.
לכן מה שצריך לעשות:

1. למצוא נקודה בתחום ההגדרה (תלוי רק באילוצים).
2. למצוא פתרון:
   (א) התחל מקדקד
   (ב) עבור לקדקד שכן בו הפונק' גבוהה יותר

דוגמה אחרת:

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 - 3x_2 \\ & 5x_1 - 2x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

נסדר כמטריצות:

$$\max\ z = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

נתחיל לבדוק מהנק':

$$(0,\, 0,\, 10,\, 12) \quad \Rightarrow \quad z = 0$$

יש לנו שני שכנים אפשריים לעבור אליהם - אחד שבו מאפסים את w_1 (ואז $x_2 \neq 0$) ואחד שבו מאפסים את w_2 ($x_1 \neq 0$).
כדי לדעת לאן ללכת, נסתכל על כך שמי שאנו מוציאים מ-0 יגדיל לנו ככל האפשר את פונק' המטרה.

כלל א'

בוחרים להוציא מ-0 את המשתנה בעל המקדם הכי גבוה בz.

כלל ב'

אם כל המקדמים בפונק' המטרה שליליים או 0 אז סיימנו.

כלל ג'

מזיזים את המשתנה שבחרנו עד שמשתנה אחר יגיע ל-0 (המשתנה הראשון שיגיע ל-0 - בו ניעצר).

את המשתנה x_i שייצא מ-0 נבחר לפי c_i מקסימלי.
את המשתנה שיהפוך ל-0 x_j (או w_j..) נבחר לפי $\frac{b_j}{a_{ij}}$ מינימלי.