

## תרגיל 5 - אלגברה לינארית

22 במרץ 2018

### תרגיל 1

תהי  $A$  מטריצה ריבועית. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם  $A + A^2$  הפיכה אז  $A$  הפיכה.

(ב) אם  $A$  הפיכה אז  $\text{trace}(A) \neq 0$

(ג) אם  $A^2 = A$  אז  $A = I$  או  $A$  אינה הפיכה

(ד) אפ ב- $A$  יש עמודת אפסים אז  $A$  אינה הפיכה.

### תרגיל 2

עבור המטריצות הבאות  $A$  :

קבעו האם  $A$  הפיכה.

אם כן אז :

\* מצאו את  $A^{-1}$

\* הציגו את  $A$  ואת  $A^{-1}$  כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

**תזכורת:** אם  $A$  מטריצה הפיכה אזי למערכת  $Ax = b$  יש פתרון יחיד והוא  $x = A^{-1}b$ .  
 ולכן בהיתנן מערכת משוואות, נבנה מטריצת המקדמים, נמצא את המטריצה ההופכית,  
 ואז נמצא את הפתרון

על ידי הכפלת וקטור הקבועים  $b$  ב- $A^{-1}$  משמאל.

### תרגיל 3

פתרו את מערכת המשוואות הבאות באמצעות מציאת מטריצה הופכית.  
 אם המטריצה המתאימה למערכת אינה הפיכה, פתרו באמצעות דירוג.

(א)

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 4x - y + 5z = 6 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$$

(ב)

$$\begin{cases} x - 4y + z = 5 \\ 2x - y - 2z = 3 \\ 3x - 5y - z = 10 \end{cases}$$

### תרגיל 4

אם למטריצה  $A_{3 \times 3}$  מתקיים:  $R_1(A) + R_2(A) = R_3(A)$   
 כלומר במטריצה מגודל  $3 \times 3$  השורה השלישית היא סכום של שתי השורות הראשונות.  
 הוכיחו:

$$(1) \text{ וקטור } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ אינו יכול לקיים את המשוואה } Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ איזה וקטור } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ יכול לקיים את המשוואה } Ax = b?$$

(3) מה קורה לשורה 3 כאשר מדרגים את  $A$ ? האם  $A$  הפיכה? נמקו.

**תזכורת:** אם  $A$  הפיכה אזי למערכת ההומוגנית  $Ax = 0$  יש רק פתרון האפס.

כלומר אם למערכת  $Ax = 0$  יש פתרון שונה מאפס אזי  $A$  אינה הפיכה

### תרגיל 5

$$C_1(A) + C_2(A) = C_3(A) : A_{3 \times 3}$$

כלומר העמודה שלישית היא סכום של שתי העמודות הראשונות.

מצאו פתרון שונה מאפס של המשוואה  $Ax = 0$  והסיקו מכך ש- $A$  אינה מטריצה הפיכה.

### תרגיל 6

הוכח ש- $A$  הפיכה אם  $a \neq 0$  וגם  $a \neq b$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

### תרגיל 7

האם התתי-הקבוצות הבאות של המרחבים הוקטוריים המצויינים הן תתי המרחבים?

אם כן-הוכיחו. אם לר-נמקו או תנו דוגמא נגדית.

$$\left\{ \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^4 \right.$$

$$\left\{ \left( \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right) \mid a + b + c = 0 \right\} \in \mathbb{R}^3 \text{ (}\square\text{)}$$
$$\left\{ \left( \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right) \mid a \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ (}\diamond\text{)}$$