

פיסיקה למתמטיקאים 88-320 מבחן מועד ב' סמסטר ב' תשע"ג

משך המבחן: שלוש שעות. כל חומר עזר מותר בשימוש (כולל מחשבון).
 ענו על 3 מ-4 השאלות הבאות. ניתן גם (לא חובה) לענות על אחת משאלות הבנוס (שאלה 5 או 6). סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים והקיפו תשובות סופיות.

1. מערכת מתוארת ע"י הלגראנג'יאן

$$\mathcal{L} = \dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + a\dot{y}^2 - bx^2 + cx,$$

כאשר a, b, c קבועים חיוביים.

- (א) רשמו את משוואות התנועה
 (ב) מצאו קבוע תנועה המתאים לקורדינטה ציקלית
 (ג) מהו התנאי לכך שהלגראנג'יאן הנתון יתאר אוסילטור הרמוני עבור הקואורדינטה x ?
 (ד) מצאו פתרון למשוואות התנועה עם התנאי שמצאתם בסעיף 1ג כאשר ידוע כי ב $t = 0$ המערכת נמצאת במנוחה בראשית. מה המשמעות הפיזיקלית של הפתרון?
 (ה) עבור אילו ערכים של הקבועים a, b, c ההמילטוניאן של המערכת מוגדר היטב?

2. מערכת מתוארת ע"י הלגראנג'יאן

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - x\dot{y} - 2y\dot{x}.$$

- (א) רשמו את משוואות התנועה
 (ב) מצאו את הפתרון הכללי למשוואות התנועה
 (ג) הראו בעזרת משפט נתר כי הלגראנג'יאן נשמר תחת סיבוב אינפיניטיסימלי $x \rightarrow x + \epsilon y, y \rightarrow y - \epsilon x$. מצאו את הגודל הנשמר כתוצאה מכך.
 (ד) מצאו את ההמילטוניאן של המערכת

3. נתונים שני וקטורים מנורמלים $|u\rangle, |v\rangle$ המקיימים $\langle u|v\rangle = \alpha$ (מרוכב) ואופרטור $A = 1 - |v\rangle\langle v|$

(א) האם האופרטור A הרמיטי? הוכח.

- (ב) מהם הערכים העצמיים של האופרטור A ?
- (ג) מערכת נמצאת במצב $|\psi\rangle$. מהן התוצאות האפשריות של מדידת הגודל הפיסיקלי המתאים לאופרטור A ובאילו הסתברויות הן מתקבלות?
- (ד) מערכת נמצאת במצב $|\psi\rangle$. מהן התוצאות האפשריות של מדידת הגודל הפיסיקלי המתאים לאופרטור A ובאילו הסתברויות הן מתקבלות?
4. נתונה חבילת גלים באוסילטור הרמוני חד מימדי $|\psi(0)\rangle$ מתאר חלקיק הנע בפוטנציאל הרמוני עם תדירות ω ב $t = 0$. נבטא מצב זה בעזרת המצבים העצמיים של ההמילטוניאן $|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$.
- (א) רשמו ביטוי למקדמים c_n (בהצגת bra, ket)
- (ב) בהינתן ש $|\psi(0)\rangle$ מנורמל, מהו התנאי שמקיימים המקדמים c_n ?
- (ג) רשמו את $|\psi(t)\rangle$ עבור $t > 0$
- (ד) מצאו את התוחלת של האנרגיה $\langle H \rangle_t = \langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle$. האם ערך זה תלוי בזמן?
- (ה) הראו כי התוחלת של המקום $\langle x \rangle_t$ מקיימת

$$\langle x \rangle_t = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |c_n c_{n+1}| \cos(\phi_{n+1} - \phi_n - \omega t).$$

- (הדרכה: רשמו $c_n = |c_n| e^{i\phi_n}$ והשתמשו באופרטורי יצירה והשמדה a, a^\dagger על מנת לחשב את אלמנטי המטריצה $\langle m | x | n \rangle$)
- (ו) הראו מפורשות כי התוחלת של המקום $\langle x \rangle_t$ מקיימת את משוואת התנועה הקלאסית $\frac{d^2 \langle x \rangle}{dt^2} + \omega^2 \langle x \rangle = 0$

5. שאלת בונוס:

- הוכיחו כי עבור מערכת המתוארת בשאלה 4, אם תוחלת האנרגיה סופית (עבור מצב כלשהו $|\psi(t)\rangle$, אזי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |c_n c_{n+1}| \cos(\phi_{n+1} - \phi_n - \omega t)$ מתכנס בהחלט (רמז: $|z_1 z_2| \leq (|z_1|^2 + |z_2|^2)/2$ לכל שני מספרים מרוכבים z_1, z_2). האם הטענה ההפוכה נכונה? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.

6. (בונוס) בזמן $T = 0$ חללית מתחילה להתרחק מכדור"א במהירות $\beta = 0.6$ ממהירות האור. בזמן $T = 5$ (לפי שעון כדור"א) נשלח לעברה שדר הנע במהירות האור. מה יורה שעון החללית כאשר ייתקבל בה השדר?

בהצלחה!