

אלגברה לינארית 2 (88113) – בחינת סיום (מועד א')

מרצים: פרופ' רון עדין, פרופ' בוריס קוניאבסקי.
מתרגלים: עדי בן-צבי, אחיה בר-און, תמר נחשוני.

משך הבחינה: שלוש שעות.
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
בבחינה שני פרקים. יש לענות על 2 שאלות בפרק א' ועל 5 שאלות בפרק ב'.
הניקוד הוא אחיד בין השאלות בכל פרק. הניקוד של כל סעיף רשום במפורש.
אם עניתם על יותר שאלות מהנדרש – נא ציינו בתחילת כל פרק אילו שאלות הן לבדיקה; בהעדר
אמירה מפורשת תיבדקנה השאלות הראשונות.
נא לענות על כל שאלה בעמוד נפרד. ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".
נא להסביר ולנמק בבירור את כל התשובות.

מהצחה!

פרק א': שאלות עם סעיפים

יש לענות על 2 שאלות (מתוך 3). הניקוד על כל שאלה הוא 25 נקודות.

- תהי A מטריצה ריבועית מרוכבת.
 - (8 נק') הוכיחו של- A ול- A^t (המטריצה המשוחלפת) יש בדיוק אותם ערכים עצמיים.
 - (9 נק') הניחו שסכום איברי כל עמודה של A הוא 5777. הוכיחו ש-5777 הוא ערך עצמי של A .
 - (8 נק') הניחו של- A יש ערך עצמי λ המקיים $|\lambda| > 1$. הראו שלכל n טבעי: $A^n \neq I$, כאשר I היא מטריצת היחידה.

- תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$, יהי $U \subseteq \mathbb{R}^{4 \times 1}$ מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות

$Ax = 0$, ויהי $W = U^\perp$ תת-המרחב הניצב ל- U ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^{4 \times 1}$.

- (8 נק') הוכיחו, לכל $u \in U, w \in W$: $\|u + w\| = \|u - w\|$.
 - (9 נק') מצאו בסיס אורתונורמלי של U ובסיס אורתונורמלי של W .
 - (8 נק') יהי $v = (1, 1, 1, 1)$. מצאו $u \in U, w \in W$ המקיימים $v = u + w$.
- יהי $V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים עם מקדמים ממשיים ממעלה 2 לכל היותר. נגדיר העתקה $T: V \rightarrow V$ ע"י

$$T(p)(x) = p(x) + p(x+1) \quad (\forall p = p(x) \in V)$$

- (8 נק') הראו כי T היא העתקה לינארית, והציגו אותה לפי בסיס של V כרצונכם.
- (9 נק') חשבו את הפולינום האופייני $f_T(x)$ ואת הפולינום המינימלי $m_T(x)$.
- (8 נק') מצאו את צורת זיורדן של T . האם T לכסינה?

פרק ב': שאלות "הוכח או הפרד"

יש לענות על 5 שאלות (מתוך 6). הניקוד על כל שאלה הוא 10 נקודות. נמקו היטב את תשובותיכם!

1. אם לשתי מטריצות מרוכבות מסדר 3×3 יש אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.
2. אם מטריצה היא לכסינה, אזי הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שלה שווה ל-1.
3. אם הפולינום המינימלי של מטריצה ריבועית A הוא $m_A(x) = x^4$, אז המטריצה $I - 4A$ היא הפיכה (כאשר I היא מטריצת היחידה).
4. כל קבוצה אורתוגונלית שאינה מכילה את וקטור האפס היא בלתי-תלויה לינארית.
5. הערכים העצמיים של מטריצה ממשית סימטרית ואורתוגונלית הם כולם ± 1 .
6. יהי V מרחב מכפלה פנימית, $\dim(V) \geq 2$, ויהיו $u, v \in V$. אם $\|u\| = \|v\| = \|u+v\|$ אז $u = v = 0$.