# ב"ש אלגברה לינארית תשפב מועד א

1. יהיו $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ שלושה מספרים מרוכבים הנמצאים על ישר אחד העובר בראשית הצירים. כמו כן, נתון כי $z_1, z_2$ נמצאים ברביע הראשון ואילו $z_3$ נמצא ברביע השלישי. נסמן $z_1 = r_1 \text{cis}\,(\alpha)$

(א) האם המנה $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ היא מספר ממשי? מדומה טהור? לא ממשי ולא מדומה טהור?פתרון: כיוון ש $z_1, z_2$ על אותו ישר ובאותו רביע אזי יש להם אותה זווית בהצגה הפלורית. כלומר

$$z_2 = r_2 \text{cis}(\alpha)$$

ואילו $z_3$ ברביע השלישי לכן הזווית שלו היא $\pi + \alpha$. כלומר

$$z_3 = r_3 \text{cis}\,(\pi + \alpha) = -r_3 \cos(\alpha)$$

ואז

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{r_1 \text{cis}\,(\alpha) - (-r_3 \text{cis}\,(\alpha))}{r_2 \text{cis}\,(\alpha) - (-r_3 \text{cis}\,(\alpha))} = \frac{r_1 \text{cis}\,(\alpha) + r_3 \text{cis}\,(\alpha)}{r_2 \text{cis}\,(\alpha) + r_3 \text{cis}\,(\alpha)} = \frac{r_1 + r_3}{r_2 + r_3}$$

שזהו מספר ממשי חיובי.

נתון בנוסף כי $z_1, z_3$ נמצאים על מעגל היחידה, וכן $\left|\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right| = \frac{1}{2}$.

(ב) חשבו את הערך המוחלט של $z_2$. פתרון: כיוון ש $z_1, z_3$ נמצאים על מעגל היחידה אזי $r_1 = r_3 = 1$. בנוסף, לפי החישובים ממקודם, נקבל ש

$$\left|\frac{r_1 + r_3}{r_2 + r_3}\right| = \frac{1}{2}$$

כיוון שהמספר חיובי נקבל

$$\frac{1}{2} = \frac{r_1 + r_3}{r_2 + r_3} = \frac{2}{r_2 + 1}$$

ואז $r_2 + 1 = 4$ ואז $r_2 = 3$.

(ג) נסמן $z_4 = \overline{z_1}$, הביעו באמצעות $\alpha$ את שטח המשולש הנוצר ע"י הנקודות $z_1, z_3, z_4$.פתרון: נמשיך בסימונים שלנו.

$$z_4 = r_1 \text{cis}\,(-\alpha) = \text{cis}\,(-\alpha)$$

ואז

$$|z_1 - z_4| = |\text{cis}(\alpha) - \text{cis}(-\alpha)| = |2i\sin(\alpha)| = 2\sin(\alpha)$$

$$|z_3 - z_4| = |-\text{cis}(\alpha) - \text{cis}(-\alpha)| = |2\cos(\alpha)| = 2\cos(\alpha)$$

$$|z_1 - z_3| = 2$$

יש לנו את שלוש צלעות המשולש. נסמן $\beta$ הזוית $\angle_{z_1 z_4 z_3}$ ואז לפי משפט הקוסינוס

$$[2\sin(\alpha)]^2 + [2\cos(\alpha)]^2 - 2\cdot 2\cos(\alpha)\cdot 2\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) = 2^2$$

ואז

$$\cos(\beta) = \frac{8-2^2}{2\sin(2\alpha)} = \frac{4-2}{\sin(2\alpha)}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{4-2}{\sin(2\alpha)}\right)$$

כעת, שטח המשולש הוא

$$\frac{2\sin(\alpha)\,2\cos(\alpha)\sin(\beta)}{2} = \sin(2\alpha)\sin(\beta)$$

2. יהי $a \in \mathbb{R}$ פרמטר ונביט במערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x+z & = 1 \\ -ax + (a-1)y - (3+a)z & = a+1 \\ (1-a)x + (a-1)y + \left(a^2 - a - 6\right)z & = 2a+4 \end{cases}$$

(א) מצאו לכל אפשרות של ערכי הפרמטר $a$, האם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או שאין פתרון.פתרון: נעביר את מערכת המשוואות לייצוג במטריצה ונדרג אותה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -a & a-1 & -a-3 & a+1 \\ 1-a & a-1 & a^2-a-6 & 2a+4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+(a-1)R_1]{R_2+aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -3 & 2a+1 \\ 0 & a-1 & a^2-7 & 3a+3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -3 & 2a+1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a+2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -3 & 2a+1 \\ 0 & 0 & (a+2)(a-2) & a+2 \end{array}\right)$$

וכעת:

אם $a-1\neq 0$ וגם $(a+2)(a-2)\neq 0$ נקבל שיש לנו צורה מדורגת, ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ולכן במקרה זה יהיה פתרון יחיד. נטפל במקרה ש $1-a\neq 0$ ($a=1$) או ש $(a+2)(a-2)=0$(שמוסיף את האפשרות $a=\pm 2$):

- $a=1$ - נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שהיא בצורה מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי ($z$) ולכן במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות.

- $a=-2$- נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שהיא בצורה מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי ($z$) ולכן במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות.

- $a=2$- נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

וקיבלנו שורת סתירה ולכן אין פתרון.

לסיכום: עבור $a\neq 1,2,-2$ יש פתרון יחיד. עבור $a=1$ או $a=-2$ יהי אינסוף פתרונות ועבור $a=2$ או $a=-2, t=-2$ לא יהיה פתרון.

(ב) עבור $a=-2$, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת.פתרון: ראינו שעבור $a=-2$ נקבל את המערכת (אחרי דירוג)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שהפתרון שלה הוא (אם נציב $z=t$)

$$\left\{\begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

(ג) האם קיימים $a,t$ עבורם הוקטור $(t,1,-t)$ הוא פתרון למערכת?פתרון: לא. כי אם נציב את

$$(x,y,z)=(t,1,-t)$$

במשוואה הראשונה נקבל

$$t+(-t)=1$$

שזוהי סתירה.

3. נביט במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(א) מצאו בסיסים ומימדים לשלושת מרחבי המטריצה $N(A), C(A), R(A)$.פתרון: נדרג את $A$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כעת:

בצורה מדורדגת, שורות שונות מאפס מהוות בסיס למרחב השורות ולכן אצלנו בסיס אפשרי למרחב השורות הוא

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

והמימד $\dim R(A) = 2$.

לבסיס למרחב העמודות ניתן לקחת את העמודות בהן יש איבר פותח בצורה מדורגת. אצלנו יש איברים פותחים בעמודות $1+2$ ולכן בסיס אפשרי למרחב העמודות הוא

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

והמימד $\dim C(A) = 2$.

בסיס למרחב האפס יתקבל מפתרון המערכת ההומוגנית שהפתרון שלה הוא (אם נציב $z = t$)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס למרחב האפס והמימד $\dim N(A) = 1$.

(ב) מצאו בסיס ל $C(A) \cap R(A)$.פתרון: נעביר את המרחבים לצורה של משוואות:

$C(A)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & -1 & z-x \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-x+y \end{array}\right)$$

ולכן

$$C(A)=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y+z=0\right\}$$

:$R(A)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -2 & 2 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 2 & z+2x \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z+2x-2y \end{array}\right)$$

ולכן

$$R(A)=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-2y+z=0\right\}$$

כעת

$$C(A)\cap R(A)=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} -x+y+z & =0 \\ 2x-2y+z & =0 \end{cases}\right\}$$

נפתור את המערכת בעזרת מטריצה והדירוג שלה:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+2R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן, נציב $y=t$, ונקבל

$$C(A)\cap R(A)=\left\{\begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

ולכן

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל $C(A)\cap R(A)$ והממד $\dim C(A)\cap R(A)=1$

4. נביט בתתי המרחבים

$$U=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mid x+y-z=0\right\}$$

$$W=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

(א) מצאו בסיסים ומימדים ל $U,W$. פתרון: נתחיל ב

$$U=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mid x+y-z=0\right\}$$

ונמצא בסיס על ידי פתירת מערכת המשוואות $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\end{array}\right)$ שמייצגת את $U$. נציב במשתנים החופשיים $y=t,z=s$ ונקבל ש

$$U=\left\{\begin{pmatrix}s-t\\t\\s\end{pmatrix}\mid s,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\mid s,t\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל $U$ ומימדו 2.

עבור $W$, רואים ש

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

בת"ל כי הם לא כפולה אחת של השני. מכיוון שהם פורשים את $W$ הם מהווים בסיס של $W$ ומימדו 2.

(ב) מצאו בסיס ומימד ל $U\cap W$. פתרון: נציג את $W$ עם מערכת משוואות:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&x\\1&0&y\\1&-1&z\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&x\\0&-1&y-x\\0&-2&z-x\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&x\\0&-1&y-x\\0&0&z-2y+x\end{array}\right)$$

ולכן

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ \mid z-2y+x=0\right\}$$

כיוון שהצגנו את שני המרחב בעזרת מערכת משוואות נקבל ש

$$U\cap W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ \mid\ \begin{matrix}x+y-z=0\\x-2y+z=0\end{matrix}\right\}$$

ונמצא בסיס על ידי פתירת מערכת המשוואות $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\1&-2&1&0\end{array}\right)$ שמייצת את $U\cap W$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\1&-2&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&-3&2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&1&-\frac{2}{3}&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{1}{3}&0\\0&1&-\frac{2}{3}&0\end{array}\right)$$

נציב במשתנה החופשי $z=t$ ונקבל ש

$$U\cap W=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}t\\\frac{2}{3}t\\t\end{pmatrix}\ \mid t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}\ \mid t\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן

$$\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל $U\cap W$ ומימדו 1.

(ג) מצאו את נקודת החיתוך בין הישר שמצאתם בסעיף ב' לבין המישור $x+y+z=3$. פתרון: נציג את $U\cap W$ עם מערכת משוואות:

$$\left(\begin{array}{c|c}\frac{1}{3}&x\\\frac{2}{3}&y\\1&z\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{c|c}\frac{1}{3}&x\\0&y-2x\\0&z-3x\end{array}\right)$$

ולכן

$$U\cap W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ \mid\ \begin{matrix}y-2x=0\\z-3x=0\end{matrix}\right\}$$

כיוון שהצגנו את הישר והמישור על ידי משוואות החיתך בינהם שנסמן $p$ יהיה

$$p=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mid \begin{array}{c} x+y+z=3\\ -2x+y=0\\ -3x+z=0\end{array}\right\}$$

ונמצא את הפתרון למערכת על ידי דירוג המטריצה המייצגת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[R_3+3R_1]{R_2+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 2 & 6\\ 0 & 3 & 4 & 9\end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 2 & 3\end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1-R_3]{R_2-2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{3}{2}\\ 0 & 3 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2}\end{array}\right) \xrightarrow{R_1-\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 3 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2}\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2}\end{array}\right)$$

ולכן נקודת החיתוך היא

$$p=\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\ 1\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}\right\}$$