נספח מספר 2- המשפטים השקולים לאקסיומת המקבילים[211]

כל המשפטים ברשימה להלן שקולים זה לזה, וכן הם שקולים לאקסיומה החמישית של אוקלידס, ביחס לקבוצת אקסיומות יסודיות הכוללת :

- אקסיומות של אסוציאטיביות.
- אקסיומות של דיסטריבוטיביות.
- אקסיומות חפיפה.
- אקסיומת ארכימדס.

כלומר- בהינתן קבוצה יסודית זו ומשפט אחד מהרשימה הבאה, ניתן להוכיח את אקסיומת המקבילים, ולהפך- מהקבוצה היסודית בצירוף אקסיומת המקבילים ניתן להוכיח כל משפט מהרשימה להלן.

הערה- אם נוציא מהקבוצה היסודית את אקסיומת ארכימדס, אזי משפטים 1 ב', 4 א', 7 א' אמנם שקולים זה לזה, אך הם <u>אינם</u> שקולים לאקסיומת המקבילים.

1. א. ישרים מקבילים שומרים על מרחק שווה ביניהם (פוסידוניוס, המאה הראשונה לפנ"הס).

ב. המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה מישר נתון, בצד נתון של הישר, הוא קו ישר (Christoph Clavius, 1574).

ג. בכל מרובע אשר יש לו שתי צלעות שוות המאונכות לצלע השלישית, קיימת לפחות נקודה אחת על הצלע הרביעית, שהאנך ממנה לצלע השלישית שממול, שווה באורכו לשתי הצלעות השוות(Giordano Vitale, 1680).

ד. קיים לפחות זוג אחד של ישרים השומרים על מרחק שווה ביניהם (Aganis, המאה השישית).

2. המרחק בין זוג ישרים אינסופיים מקבילים, יכול להשתנות, אך הוא נשאר תמיד פחות מגודל קבוע מסוים (Proclus, המאה החמישית).

3. א. שני ישרים המקבילים לישר שלישי, מקבילים ביניהם (משפט 30 של אוקלידס).

ב. אם ישר l חותך את ישר m, אז הוא יחתוך גם את הישר המקביל ל-m (Proclus, המאה החמישית).

---

[211] ע"פ [4,עמ' 118-121] וכן ע"פ [11,עמ' 128-129].

ג. דרך נקודה נתונה, שאיננה על ישר נתון, ולא על המשכו, ניתן לשרטט לא יותר ממקביל אחד לישר הנתון[212] (Playfair John, סוף המאה ה-18).

4. א. אם הישרים l ו-m נחתכים ע"י ישר שלישי (PQ) המאונך רק לאחד מהם (נניח l), אז האנכים מ-m ל-l הם פחות מ-PQ, בצד שבו m יוצר זווית חדה עם PQ, ויותר מ-PQ בצד שבו m יוצר זווית קהה עם PQ (Nasir al-Din, המאה ה-13).

ב. קווים ישרים שאינם שומרים על מרחק שווה ביניהם, מתקרבים זה לזה בכיוון אחד, ומתרחקים בכיוון שני (Pietro Antonio Cataldi, 1603).

5. א. בהינתן ישר סופי (קטע), ניתן לבנות משולש הדומה למשולש נתון (John Wallis, 1663; Lazare-Nicholas-Marguerite Carnot, 1803; Adrien-Marie Legendre, 1824).

ב. קיים זוג של ישרים דומים, אשר אינם חופפים (Gerolamo Saccheri, 1733).

6. א. בכל מרובע אשר יש לו שתי צלעות שוות המאונכות לצלע השלישית, שתי הזוויות האחרות הן ישרות (Gerolamo Saccheri, 1733).

ב. בכל מרובע בעל 3 זוויות ישרות, הזווית הרביעית היא גם ישרה (Alexis-Claude Clairaut, 1741; Johann Heinrich Lambert, 1766).

ג. קיים לפחות מלבן אחד (Gerolamo Saccheri, 1733).

7. א. סכום הזוויות של כל משולש שווה לשתי זוויות ישרות (משפט 32b של אוקלידס; Gerolamo Saccheri, 1733; Adrien-Marie Legendre, תחילת המאה ה-19).

ב. קיים לפחות משולש אחד אשר סכום הזוויות שלו הוא π (Gerolamo Saccheri , 1733; Adrien-Marie Legendre, תחילת המאה ה-19).

8. לא קיים סטנדרט מוחלט של אורך (Johann Heinreich Lambert, 1766; Adrien Marie Legendre, תחילת המאה ה-19).

9. א. כל ישר שעובר דרך נקודה פנימית של זווית יחתוך, אם נאריך אותו מספיק, לפחות שוק אחת של הזווית, או את המשכה (J. F. Lorenz, 1791).

[212] אם נצרף לכך את משפט 31 של אוקלידס (אשר איננו תלוי באקסיומת המקבילים), האומר כי דרך כל נקודה נתונה ניתן לשרטט ישר המקביל לישר נתון, מכאן כי דרך נקודה נתונה ניתן להעביר בדיוק מקביל אחד לישר נתון.

ב. דרך כל נקודה פנימית לזווית, ניתן לשרטט ישר שיחתוך את שני שוקי הזווית, או את המשכם (Adrien-Marie Legendre, תחילת המאה ה-19).

10. ניתן לבנות משולש שהשטח שלו יהיה גדול מכל שטח נתון (Karl Friedrich Gauss, 1799).

11. במישור, הזזה וסיבוב של ישר, הן שתי פעולות אשר אינן תלויות זו בזו (Bernhard Friedrich Thibaut ,1809).

12. א. דרך כל 3 נקודות שאינן על ישר אחד, ניתן תמיד להעביר מעגל (Farkas Bolyai, 1820; Adrien-Marie Legendre, תחילת המאה ה-19).

ב. דרך כל 4 נקודות שאינן על מישור אחד, ניתן להעביר ספירה (Farkas Bolyai, 1820).

13. סכום הזוויות החד-צדדיות שיוצרים שני ישרים מקבילים עם ישר שלישי שחותך אותם, הוא π (משפט 29 של אוקלידס; Ptolemy, המאה השניה).