בס"ד

פתרון הבוחן

1. ענו על הסעיפים הבאים :

א. V מ"ו מעל F . יהיו $\{\vec{v_1},\vec{v_2},...,\vec{v_n}\}\subseteq V$ ו- $A\in F^{n\times n}$ הפיכה. הוכיחו או הפריכו:
$\{\vec{v_1},\vec{v_2},...,\vec{v_n}\}$ בסיס של V $\Leftrightarrow$ $\{A\vec{v_1},A\vec{v_2},...,A\vec{v_n}\}$ בסיס של V.

<u>פתרון :</u>

<u>כיוון אחד:</u>

נניח ש $\{\vec{v_1},\vec{v_2},...,\vec{v_n}\}$ בסיס של V . מנתון זה נובע בפרט ש $\{\vec{v_1},\vec{v_2},...,\vec{v_n}\}$ בתל ו $\dim V=n$.
היות ובקבוצה $\{A\vec{v_1},A\vec{v_2},...,A\vec{v_n}\}$ יש n וקטורים, לפי השלישי חינם מספיק להוכיח שהוקטורים $\{A\vec{v_1},A\vec{v_2},...,A\vec{v_n}\}$ בת"ל. :

נוכיח זאת : נניח שקיים צ"ל : $\alpha_1A\vec{v_1}+\alpha_2A\vec{v_2}+\cdots+\alpha_nA\vec{v_n}=0$

ניתן "להוציא A " : $A\left(\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+\cdots+\alpha_n\vec{v_n}\right)=0$.

כיוון ש A הפיכה ניתן להכפיל משמאל ב A^{-1} ונקבל : $A^{-1}A\left(\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+\cdots+\alpha_n\vec{v_n}\right)=A^{-1}0$

כלומר $\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+\cdots+\alpha_n\vec{v_n}=0$. אבל ידוע ש $\{\vec{v_1},\vec{v_2},...,\vec{v_n}\}$ בתל ולכן

$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ כלומר $\{A\vec{v_1},A\vec{v_2},...,A\vec{v_n}\}$ בת"ל.

<u>כיוון הפוך :</u>

נניח ש $\{A\vec{v_1},A\vec{v_2},...,A\vec{v_n}\}$ בסיס של V . מנתון זה נובע בפרט ש $\{A\vec{v_1},A\vec{v_2},...,A\vec{v_n}\}$ בתל ו $\dim V=n$.

היות ובקבוצה $\{\vec{v_1},\vec{v_2},...,\vec{v_n}\}$ יש n וקטורים, לפי השלישי חינם מספיק להוכיח שהוקטורים $\{\vec{v_1},\vec{v_2},...,\vec{v_n}\}$ בת"ל. :

נוכיח זאת : נניח שקיים צ"ל : $\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+\cdots+\alpha_n\vec{v_n}=0$

נכפיל את המשוואה ב A : $A\left(\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+\cdots+\alpha_n\vec{v_n}\right)=0$.

נפתח את הסוגריים ונקבל: $\alpha_1A\vec{v_1}+\alpha_2A\vec{v_2}+\cdots+\alpha_nA\vec{v_n}=0$.

ידוע ש $\{A\vec{v_1},A\vec{v_2},...,A\vec{v_n}\}$ בתל ולכן : $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$.

ולכן לפי השלישי חינם $\{\vec{v_1},\vec{v_2},...,\vec{v_n}\}$ הם בסיס.

ב. אם נתון ש $A\in F^{n\times n}$ אינה הפיכה. כיצד תשתנה תשובתכם ? הסבירו !

פתרון : אם A אינה הפיכה, אם $\left\{\vec{v_1},\vec{v_2},...,\vec{v_n}\right\}$ בסיס של V , $\left\{A\vec{v_1},A\vec{v_2},...,A\vec{v_n}\right\}$ אינו בסיס של V, היות והוקטורים אינם בת"ל , לדוגמה עבור A=0 , $\left\{A\vec{v_1},A\vec{v_2},...,A\vec{v_n}\right\}=\left\{\vec{0}\quad\cdots\quad\vec{0}\right\}$ שכמובן אינם בת"ל.....

מאידך, האם יתכן ש $\left\{A\vec{v_1},A\vec{v_2},...,A\vec{v_n}\right\}$ כאשר A אינה הפיכה יהיו בסיס ?

לא יתכן ש $\left\{A\vec{v_1},A\vec{v_2},...,A\vec{v_n}\right\}$ יהיו בת״ל היות ולהזכירכם $A\vec{v_i}$ הוא צ"ל של עמודות A. A ריבועית ואינה הפיכה ולכן עמודותיה אינן בת"ל. ולכן לא יתכן שיהיו n וקטורים בת"ל ($\left\{\vec{v_1},\vec{v_2},...,\vec{v_n}\right\}$) צ"ל של וקטורים שאינם בת"ל $\left\{A\vec{v_1},A\vec{v_2},...,A\vec{v_n}\right\}$ ולכן הכיוון השני לא יתכן כלל!

יש לציין שהיות והכיוון השני לא היה טריוויאלי ואף אחד כלל לא חשב עליו, לא הורדנו נקודות!

2. שני הסעיפים הבאים אינם קשורים זה לזה :

א. תהא $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ סימטרית והפיכה שחלק מרכיביה ידועים וחלקם לא. נתון ש :

$A=\begin{pmatrix} * & -1 & * \\ * & * & 4 \\ 0 & * & * \end{pmatrix},A^{-1}=\begin{pmatrix} * & -3 & * \\ * & * & 1 \\ 1 & * & * \end{pmatrix}$. מצאו את האיברים המסומנים ב *.

פתרון :

א. A סימטרית ולכן $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & b & 4 \\ 0 & 4 & c \end{pmatrix}$. מאידך, A הפיכה וכן : $AA^{-1}=I$. נשחלף את שני האגפים ונקבל $\left(A^{-1}\right)^T A^T=I$. ידוע ש $A=A^T$ נחליף ונקבל $\left(A^{-1}\right)^T A=I$, היות ולכל מטריצה הפיכה יש רק הופכית אחת, נקבל ש $\left(A^{-1}\right)^T=A^{-1}$ ולכן A^{-1} סימטרית.
(לא הורדנו נקודות למי שלא הוכיח למרות שזה לא טריוויאלי !)

נציב ונקבל : $A^{-1}=\begin{pmatrix} d & -3 & 1 \\ -3 & e & 1 \\ 1 & 1 & f \end{pmatrix}$.

ידוע ש $AA^{-1}=I$. נציב את הנתונים ונקבל :

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & b & 4 \\ 0 & 4 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -3 & 1 \\ -3 & e & 1 \\ 1 & 1 & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} ad+3=1 \\ -3a-e=0 \\ a-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \\ e=-3 \\ d=-2 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} -d-3b=0 \\ 3+be+4=1 \\ -1+b+4f=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2-3b=0 \\ 3-3b+4=1 \\ -1+b+4f=0 \end{array}\right\}$$

ולכן נקבל ..... :

ב. נתונה המשוואה הבאה : $2X-X^t=B$ כאשר $X\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. בטאו את המטריצה X במונחים של B .

$$2X-X^t=B\Rightarrow 2X=X^t+B\Rightarrow X=\frac{X^t+B}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(2X-X^t\right)^t=B^t\Rightarrow 2X^t-X=B^t\Rightarrow X^t=\frac{X+B^t}{2}$$

$$X=\frac{\frac{X+B^t}{2}+B}{2}=\frac{\frac{X+B^t+2B}{2}}{2}=\frac{X+B^t+2B}{4}$$

$$4X=X+B^t+2B$$

$$3X=B^t+2B$$

$$X=\frac{B^t+2B}{3}$$