פתרון התרגיל השני

<u>תרגיל 2.1</u>

ב. צ"ל: $A+(B+C)=(A+B)+C$. נוכיח שזה מתקיים לאיבר כללי במטריצה:
$[A+(B+C)]_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$. אך בגלל שאיברי המטריצה באים משדה (שבו מתקיימת תכונת הדיסטריביוטיביות) מתקיים: $a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=[(A+B)+C]$

ו. צ"ל: $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

$$[(\alpha+\beta)A]_{ij}=(\alpha+\beta)a_{ij}=\alpha a_{ij}+\beta a_{ij}=[\alpha A]_{ij}+[\beta A]_{ij}=[(\alpha+\beta)A]_{ij}$$

ח. צ"ל: $1A=A$

$$[1A]_{ij}=1a_{ij}=a_{ij}=[A]_{ij}$$

וכנ"ל לגבי $0A=A0=0$

<u>תרגיל 3.2</u>

נשים לב:
ניתן להגיע לעמודות של המטריצה הרצויה בעזרת צירוף ליניארי של העמודות במטריצה הנתונה.
מההרצאה אנו יודעים ש $Ae_i=C_i(A)$.
כעת

$$Ae_1=C_1(A)$$
$$A(e_1+e_2)=C_1(A)+C_2(A)$$
$$A(e_2+e_3)=C_2(A)+C_3(A)$$
$$Ae_3=C_3(A)$$

ולכן המטריצה המבוקשת היא $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$.

<u>תרגיל 4.3</u>

מתקיים: $A^t\in\mathbb{F}^{n\times m}\leftrightarrow A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ומכיוון ש- $A=A^t$, נקבל ש $m=n$.

<u>תרגיל 4.6</u>

א. נתון שמטריצה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ היא סימטרית: $A^t=A$; וגם אנטי סימטרית: $A^t=-A$.
ולכן בסה"כ נקבל $A=-A\Rightarrow 2A=0$. כין ש- $\mathbb{R}$ הוא ממאפיין 0, נקבל $A=0$ (היות ואפשר לחלק ב-2).

ב. בשדה ממאפיין 2 היינו מקבלים $2A=0$ כאשר $A\neq 0$ (היות ובשדה אין מחלקי 0). קל למצוא דוגמא מעל $\mathbb{Z}_2$.

<u>תרגיל 5.3</u>

א. αI מטריצה סקלרית לכל $\alpha\in\mathbb{F}$ ובפרט $\alpha=1$ אבל $1I=I$ ולכן מטריצת הזהות היא סקלרית.
יהי $\alpha\neq 1$ אז $(\alpha I)A=\alpha(IA)=\alpha A\neq A$.

ב. על פי הגדרת מטריצה אלכסונית $a_{ij}=\begin{cases}\alpha_i\in\mathbb{F} & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ ובפרט אם $\alpha=\alpha_i$ לכל i.

אם קיימים i,j כך ש $\alpha_{ii}\neq\alpha_{jj}$ המטריצה אלכסונית אך אינה מטריצה סקלרית.

<u>תרגיל 5.6</u>

על מנת להראות שמחלקת המטריצות האלכסוניות היא המחלקה הגדולה ביותר שבה מתקיימת התכונה, יש להראות שהמטריצות במחלקה אחת מעליה (המשולשיות העליונות וגם התחתונות – בנפרד) אינן מתחלפות.
היות והן המחלקות הקטנות ביותר המכילות אותה (מדוע?) זה מספיק להראות שהתכונה לא מתקיימת בהן <u>משום שהיות ומטריצות אלה (שאינן מתחלפות) נמצאות גם במחלקות הגדולות יותר המכילות אותן (לדוגמה משולשיות) כמובן שזה לא יתקיים גם בהן</u>. ההוכחה שאכן האלכסוניות מתחלפות היא קלה ביותר ודוגמאות נגדיות לגבי מטריצות משולשיות שלא מתחלפות ניתן למצוא למכביר.

<u>תרגיל 5.8</u>

נניח ש AB סימטרית אז $AB=(AB)^t=B^tA^t=BA$.

נניח ש $AB=BA$ אז $(AB)^t=(BA)^t=A^tB^t=AB$.

<u>תרגיל 5.16</u>

A^1 - המטריצה הריבועית $n\times n$ שבאלכסון ה- k מעל האלכסון יש 1 והשאר 0 .

ולכן , היות והמטריצה היא בגודל $n\times n$, יש $n-1$ אלכסונים כאלו (מדוע ?) ו A_{n-1}

היא המטריצה שבה יש 1 רק בפינה הימנית העליונה .

נוכיח באינדוקציה שלכל k טבעי מתקיים $(A_1)^k=A_k$:

בסיס האינדוקציה : $A_1=(A_1)^1$.

נניח : $(A_1)^k=A_k$ ונוכיח : $(A_1)^{k+1}=A_{k+1}$:

$(A_1)^{k+1}=(A_1)^k\times(A_1)=A_k\times A_1=?$.

לפי הנוסחה לכפל מטריצות מתקיים $Ae_i = C_i(A)$, ולכן אצלנו

$$A_k \times A_1 = A_k \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{the}\ \text{k+1-th} \\ \textit{coloumn}\ \text{of}\ A^k}} \ddots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{the}\ \text{almost}\ \textit{last} \\ \textit{coloumn}\ \text{of}\ A^k}} \right) = A^{k+1}$$

כעת נקבל לפי האינדוקציה כי $(A_1)^n = A_n$ והרי זו מטריצת האפס שהרי אין אלכסון n הרי שכל המטריצה היא אפסים ולכן היא נילפוטנטית מסדר n בעוד שהחזקה הקודמת לה אינה מטריצת האפס לפי האינדוקציה , שהרי הפינה הימנית העליונה היא 1 (אמרנו קודם)
.