<u>88113-תרגיל5-פתרון:</u>

3.3 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח את התכונות הבאות של הפולינום האופייני $f_A(x)$:

א. $\sigma(A)=\{\lambda\in\mathbb{F} : f_A(\lambda)=0\}$.

ב. $f_A(0)=|A|$. בפרט, A הפיכה $\Leftrightarrow$ $f_A(0)\neq 0$.

[רמז: אפשר להציב את הסקלר ורק אחר כך לחשב את הדטרמיננטה]

פתרון:

$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \exists v \neq 0 : Av = \lambda v \Leftrightarrow \underbrace{(A-\lambda I)v = 0}_{\text{קיים פתרון לא טריויאלי}} \Leftrightarrow 0 = |A-\lambda I| = f_A(\lambda)$$

$$f_A(0) = (-1)^n |A - 0\cdot I| = (-1)^n |A|$$

$$\text{הפיכה} \quad A \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow |A - 0\cdot I| \neq 0 \Leftrightarrow f_A(0) \neq 0$$

3.4 תרגיל. תהא $A=\alpha I\in\mathbb{F}^{n\times n}$. מצא את הפולינום האופייני של A.

פתרון:

$$A = \alpha I \Rightarrow |\lambda I - A| = |\lambda I - \alpha I| = |(\lambda-\alpha)I| = \left|\begin{pmatrix} \lambda-\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda-\alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-\alpha \end{pmatrix}\right| = (\lambda-\alpha)^n$$

3.9 תרגיל. א. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות. הוכח: $f_A(x)=f_B(x)$ (במלים: למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני).

ב. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, כך שאחת מהן לפחות הפיכה. הוכח: $f_{AB}(x)=f_{BA}(x)$. [רמז: (א)]

פתרון:

$$B = P^{-1}AP$$

$$f_B(\lambda) = |\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP| = |P^{-1}\lambda P - P^{-1}AP| =$$
$$|P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}||(\lambda I - A)||P| = |(\lambda I - A)| = f_A(\lambda)$$

בה"כ נניח A הפיכה,אזי:

$$AB = A(P^{-1}AP)$$
$$BA = (P^{-1}AP)A = (A^{-1}A)(P^{-1}AP)A = A^{-1}(A(P^{-1}AP))A = A^{-1}(AB)A$$
$$\Rightarrow BA \approx AB \Rightarrow f_{AB}(x) = f_{BA}(x)$$

<u>3.11</u>

$T : V \to V$

$\dim V = n$

תהי λ ע"ע עם ריבוי i ומ"ע ממימד j .

אזי $f_T(x) = (x-\lambda)^i P(x)$ עבור $P(x)$ פולינום ממעלה n-i.

יהיו $v_1,...,v_j$ הו"ע הפורשים את המ"ע המתאים לה. נשלים לבסיס עבור V: $v_1,...,v_n$ ונקבל

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda & \ldots & 0 & \# & \# & \# \\ 0 & \ddots & \vdots & \# & \# & \# \\ \vdots & \ddots & \lambda & \# & \# & \# \\ & \cdots & 0 & * & * & * \\ \vdots & & \vdots & * & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & * & * & * \end{pmatrix} \Rightarrow f_T(x) = (x-\lambda)^j q(x), where \quad q(x) \in \quad F_{n-j}[x]$$

ולכן $(x-\lambda)^j \mid f_T$ ובסה"כ $j \le i$.

<u>3.15</u>

הטעות נובעת מהתייחסות למט' הסקלרית xI ככפל בין מטריצות. למעשה בהצבת A במקום x היא אמורה להופיע בכל רכיב באלכסון וליצור מטריצת בלוקים אלכסונית.

<u>3.18</u>

א. ראה קובץ באתר

$$5x^5+3x^3-x^2+7=0$$
$$\Downarrow$$
ב.
$$x^5+\frac{3}{5}x^3-\frac{x^2}{5}+\frac{7}{5}=0$$
$$\Downarrow$$
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -7/5 & 0 & 1/5 & -3/5 & 0 \end{pmatrix}$$

ג.בדומה ל-ב'

ד.
$$f_A=(x-1)(x-(1-i))(x-(1+i))=(x-1)((x-1)+i)((x-1)-i)=(x-1)((x-1)^2-i^2)=(x-1)((x-1)^2+1)$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ה.
$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^k \end{pmatrix}$ עבור λ ע"ע.

ו.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & \cdots 0 & 1 & \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \cdots & 0 \\ & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix}$$