<u>משפט:</u>

תהיינה A,B,C קבוצות ו־$f:A\to B, g:B\to C$ פונקציות.

א. אם f,g חח"ע אז $g\circ f$ חח"ע.

ב. אם f,g על אז $g\circ f$ על.

ג. אם $g\circ f$ חח"ע אז f חח"ע.

ד. אם $g\circ f$ על אז g על.

<u>הוכחה:</u>

א. יהיו a_1,a_2 עבורם: $(g\circ f)(a_1)=(g\circ f)(a_2)$, צ"ל: $a_1=a_2$. אם כן:

$$(g\circ f)(a_1)=(g\circ f)(a_2)$$

$$g(f(a_1))=g(f(a_2))$$

g חח"ע, ולכן:

$$f(a_1)=f(a_2)$$

f חח"ע ולכן: $a_1=a_2$, כנדרש.

ב. יהי $c\in C$, צ"ל שקיים $a\in A$ כך ש: $(g\circ f)(a)=c$. אם כן, צ"ל: $g(f(a))=c$.

$g:B\to C$ על, ולכן קיים $b\in B$ עבורו: $g(b)=c$. כמו כן, $f:A\to B$ על ולכן קיים $a\in A$ עבורו: $f(a)=b$. נציב זאת בשוויון הקודם ונקבל ש: $g(f(a))=c$, כנדרש.

לפני הסעיפים הבאים, נתבונן בדוגמה הבאה: $A=\{1\}, B=\{2,3\}, C=\{4\}$, והפונקציות:

$$f:A\to B,\ f(1)=3$$

$$g:B\to C,\ g(2)=g(3)=4$$

ההרכבה $g\circ f:\{1\}\to\{4\}$ היא חח"ע ועל. אבל, f לא על ו־g לא חח"ע.

ג. נתון ש־$g\circ f$ חח"ע, צ"ל ש־f חח"ע. יהיו $a_1,a_2\in A$ עבורם: $f(a_1)=$

$f\left(a_2\right)$, צ"ל: $a_1 = a_2$.
אם כן, נפעיל את g על שני אגפי השוויון $f\left(a_1\right) = f\left(a_2\right)$ ונקבל: $g\left(f\left(a_1\right)\right) = g\left(f\left(a_2\right)\right)$. מהגדרת הרכבה אפשר לרשום:

$$\left(g \circ f\right)\left(a_1\right) = \left(g \circ f\right)\left(a_2\right)$$

ומכיוון ש־$g \circ f$ חח"ע, נקבל שאכן: $a_1 = a_2$ כנדרש.
ד. נתון ש־$g \circ f$ על, צ"ל ש־g על. יהי $c \in C$, צ"ל שקיים $b \in B$ עבורו: $g\left(b\right) = c$.
אם כן, $g \circ f$ על ולכן קיים $a \in A$ כך ש: $\left(g \circ f\right)\left(a\right) = c$. מהגדרת הרכבה: $g\left(f\left(a\right)\right) = c$. $f : A \to B$, ולכן: $f\left(a\right) \in B$. אם נסמן: $b = f\left(a\right)$ נקבל ש:$b \in B$ מקיים: $g\left(b\right) = c$, כנדרש.

<u>פונקציות הפיכות:</u>
כדי להגדיר את המושג של פונקציה הפיכה, ניזכר במושג היחס ההפוך: $(a, b) \in R \iff (b, a) \in R^{-1}$.
תהי $f : A \to B$ פונקציה. כלומר, $f \subseteq A \times B$ כך שלכל $a \in A$ קיים $b \in B$ יחיד עבורו: $(a, b) \in f$.
נאמר ש־f היא הפיכה, אם היחס ההפוך $f^{-1} \subseteq B \times A$ הוא פונקציה. כלומר, אם לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ יחיד עבורו: $(b, a) \in f^{-1}$.
במצב כזה, נאמר שהפונקציה $f^{-1} : B \to A$ היא ההופכית של f. נדגיש: $(a, b) \in f \iff (b, a) \in f^{-1}$ בסימונים שלנו פירושו:

$$f\left(a\right) = b \iff f^{-1}\left(b\right) = a$$

למשל: $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3\}$. נתבונן בפונקציות הבאות:

$$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

$$g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

היחסים ההפוכים הם:

$$f^{-1} = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

$$g^{-1} = \{(2,1), (3,2), (3,3)\}$$

f^{-1} היא פונקציה ולכן f הפיכה; g^{-1} לא פונקציה ולכן g לא הפיכה.
דוגמה נוספת: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. ב־f נמצאים הזוגות $(2,4), (-2,4)$; לכן, ב־f^{-1} נמצאים הזוגות $(4,2), (4,-2)$ ולכן f^{-1} לא פונקציה ו־f לא הפיכה.

<u>משפט:</u>
<u>$f : A \to B$</u> הפיכה אם ורק אם f חח"ע ועל.
<u>הוכחה:</u>
f הפיכה אם ורק אם היחס ההפוך f^{-1} הוא פונקציה אם ורק אם לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ יחיד כך ש: $(b,a) \in f^{-1}$; אם ורק אם - לפי הגדרת יחס הפוך - לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ יחיד כך ש: $(a,b) \in f$.
כעת, אם לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ עבורו $(a,b) \in f$ כלומר: $f(a) = b$, אז f על. מצד שני, לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ **יחיד** עבורו: $f(a) = b$, ולכן לא קיימים a_1, a_2 שונים עבורם: $f(a_1) = f(a_2)$, לכן f חח"ע.

<u>הקשר בין הרכבה לבין הפיכות:</u>
תהי $f : A \to B$ הפיכה, כלומר $f^{-1} : B \to A$ פונקציה.
נסמן ב־$id_A : A \to A$ את פונקציית הזהות של A: $id_A(a) = a$, ובאופן דומה $id_B : B \to B$ הזהות של B: $id_B(b) = b$.
<u>טענה:</u>
$f^{-1} \circ f = id_A, f \circ f^{-1} = id_B$.
<u>הוכחה:</u>
נוכיח ש: $f^{-1} \circ f = id_A$. ראשית, $id_A : A \to A$; מצד שני, לפי הגדרת הרכבה, $f^{-1} \circ f : A \to A$ ולכן יש להן את אותו תחום ואותו טווח. כמו כן, לכל $a \in A$, מתקיים: $(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a))$. נסמן: $f(a) = b$, ומההגדרה של הפונקציה ההופכית: $f^{-1}(b) = a$, כלומר:

$$a = f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a))$$

ואכן: $(f^{-1} \circ f)(a) = id_A(a)$, ולכן הפונקציות שוות.

כך, אם f הפיכה, אנחנו יכולים לנסות למצוא את ההופכית f^{-1}.
למשל, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$. f חח"ע ועל ולכן הפיכה. כעת, f^{-1} צריכה לקיים: $(f\circ f^{-1})(x)=id_{\mathbb{R}}(x)=x$. כלומר:

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=x$$

כלומר: $\left(f^{-1}(x)\right)^3=x$ ואז: $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{3}}$.

<u>משפט:</u>
פונקציה $f:A\to B$ היא הפיכה אם ורק אם קיימת $g:B\to A$ המקיימת: $f\circ g=id_B, g\circ f=id_A$. במצב כזה, $g=f^{-1}$.
<u>הוכחה:</u>
כיוון ראשון: נתון ש־f הפיכה. הפונקציה $f^{-1}:B\to A$ היא ה־g המבוקשת, כמו שהראנו בטענה הקודמת.
כיוון שני: קיימת $g:B\to A$ המקיימת: $f\circ g=id_B, g\circ f=id_A$, צ"ל ש־$f$ הפיכה, וש־$g=f^{-1}$.
id_A, id_B חח"ע ועל, כלומר: $f\circ g, g\circ f$ חח"ע ועל. $g\circ f$ חח"ע, ולכן f חח"ע (טענה קודמת). $f\circ g$ על ולכן f על (טענה קודמת). מפה לשם, f חח"ע ועל ולכן – לפי משפט קודם – f הפיכה.
כדי להראות ש: $g=f^{-1}$, צ"ל: $g(b)=a \iff f(a)=b$. נתון ש: $f(g(b))=b$, ולפי ההגדרה של הופכית: $f^{-1}(b)= \iff f(g(b))=b$ $g(b)$ ($a=g(b)$).

<u>תכונות של פונקציות הפיכות:</u>
1. אם f הפיכה, ההופכית f^{-1} יחידה (ה"$g=f^{-1}$" מהמשפט האחרון).
2. $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$, כלומר ההופכית של ההופכית זו הפונקציה המקורית.
3. אם $f:A\to B, g:B\to C$ הפיכות, אז גם $g\circ f$ הפיכה ומתקיים: $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

<u>הוכחה:</u>
נוכיח את 3. ראשית, f,g הפיכות ולכן חח"ע ועל ולכן גם $g\circ f$ חח"ע ועל (משפט קודם) ולכן הפיכה.
כעת, כדי להראות ש: $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$, אנחנו צריכים להראות ש: $(g\circ f)\circ\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)=id_C$ וגם: $\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)\circ(g\circ f)=id_A$. נראה ש:

$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})=id_C$, הצד השני דומה.

ראשית, $id_C:C\to C$, ומצד שני: $(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1}):C\to B\to$ $A\to B\to C$ (פורמלית, צריך להשתמש בהרכבה אחת בכל פעם...) ויש להן את אותו התחום ואותו הטווח. כמו כן, לכל $c\in C$:

$$(g\circ f)\circ\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)(c)=g\circ\left(f\circ f^{-1}\right)\circ g^{-1}(c)=g\circ id_B\circ g^{-1}(c)$$

$$=g\circ g^{-1}(c)=id_C(c)$$

ולכן הפונקציות שוות.

<u>הערה:</u>

אם $f:A\to B$, $g:B\to A$, אז: $f\circ id_A=f, id_B\circ g=g$.

<u>הפיכות מצד אחד:</u>

במטריצות, אם $AB=I$ (A ריבועית) אז A הפיכה, כלומר הפיכות מצד אחד גוררת הפיכות.

בפונקציות באופן כללי זה לא בהכרח נכון. אם $f:A\to B$ וקיימת $g:B\to A$ עבורה: $f\circ g=id_B$ או $g\circ f=id_A$, זה לא מספיק כדי לומר ש־f הפיכה. למשל, נתבונן בפונקציה הבאה: $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=n+1$. הפונקציה $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המוגדרת באופן הבא:

$$g(n)=\begin{cases} n-1 & n>1\\ 1 & n=1\end{cases}$$

נקבל:

$$g\circ f(n)=g(f(n))=g(n+1)=n+1-1=n=id_{\mathbb{N}}(n)$$

כלומר, $g\circ f=id_{\mathbb{N}}$, אך f לא הפיכה (לא על, ל־$1\in\mathbb{N}$ לא קיים $n\in\mathbb{N}$ עבורו $f(n)=1$).