פתרון תרגיל 1:

1. א. נוכיח זאת. יהי $x \in A \cup (B \cap C)$. לכן, מהגדרת איחוד:

$$(x \in A) \vee (x \in B \cap C)$$

מהגדרת חיתוך נקבל:

$$(x \in A) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C))$$

כעת, מתוך הטאוטולוגיה $(p \vee r) \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee r$ (יאיי טאוטולוגיה טבלאות אמת וכאלה) נקבל:

$$((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in C))$$

אם נסמן $r = (x \in A), q = (x \in B), p = (x \in C)$. לפי הגדרת איחוד נקבל:

$$(x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)$$

ומהגדרת חיתוך נקבל:

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

קל לראות שהגרירות הן לשני הצדדים, ולכן לפי הכלה דו־כיוונית:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

ב. כמו א' רק הפוך.

2. יהי $(x, y) \in (A \times B)^c$. מהגדרת משלים, $(x, y) \notin A \times B$. מהגדרת מכפלה קרטזית:

$$(x, y) \in A \times B \iff (x \in A) \wedge (y \in B)$$

ולכן כאשר $(x,y) \notin A \times B$, $(x \notin A) \vee (y \notin B)$.

אם $(x \notin A)$, אז $x \in A^c$. מכיוון שבוודאי $y \in Y$, נקבל מהגדרת מכפלה קרטזית שאכן $(x,y) \in A^c \times Y$.

מצד שני אם $y \notin B$, אז $y \in B^c$. מכיוון שבוודאי $x \in X$, נקבל מהגדרת מכפלה קרטזית שאכן $(x,y) \in X \times B^c$.

אם כן, נקבל שבכל מקרה $(x,y) \in (A^c \times Y) \vee (X \times B^c)$, ולכן $(A \times B)^c \subseteq (A^c \times Y) \vee (X \times B^c)$.

הכיוון השני הוא כמו הכיוון הראשון (רק הפוך!) ובסה"כ נקבל:

$$(A \times B)^c = (A^c \times Y) \vee (X \times B^c)$$

3. א. יהי $f(x) \in f(f^{-1}[A])$. לכן $x \in f^{-1}[A]$ ולכן $f(x) \in A$, ולכן $f(f^{-1}[A]) \subseteq A$.

ב. נראה את ההכלה בכיוון השני. יהי $a \in A$, מכיוון ש-f על קיים $x \in X$ עבורו $f(x) = a$. לפי ההגדרה, $x \in f^{-1}[A]$ ולכן:

$$a = f(x) \in f(f^{-1}[A])$$

ולכן $A \subseteq f(f^{-1}[A])$ וביחד עם סעיף א' נקבל שיוויון.

דוגמה נגדית בה f אינה על: $A = X = Y = \{1,2\}$ והפונקציה מוגדרת ע"י $f(1) = f(2) = 1$. נקבל:

$$f(f^{-1}[A]) = f(A) = \{1\} \neq A$$

ג. יהי $b \in B$, לכן $f(b) \in f(B)$, ולכן $b \in f^{-1}[f(B)]$; לכן $B \subseteq f^{-1}[f(B)]$.

ד. נראה את ההכלה בכיוון השני. יהי $x \in f^{-1}[f(B)]$. לכן $f(x) \in f(B)$. מהגדרת $f(B)$ נקבל שקיים $a \in B$ עבורו:

$$f(x) = f(a)$$

ומכיוון שהפונקציה חח"ע נקבל שאכן $x = a \in B$ ולכן $f^{-1}[f(B)] \subseteq B$ וביחד עם סעיף ג' נקבל שיוויון.

דוגמה נגדית בה f אינה חח"ע: $X = Y = \{1,2\}, B = \{1\}$ והפונקציה מוגדרת ע"י $f(1) = f(2) = 1$. נקבל:

$$f^{-1}[f(B)] = f^{-1}[\{1\}] = \{1,2\} \neq B$$

4.א. יהי $x \in f^{-1}[A^c]$. לכן $f(x) \in A^c$.לכן $f(x) \notin A$. לכן $x \notin f^{-1}[A]$. לכן $x \in (f^{-1}[A])^c$. הכיוון השני דומה.

ב. יהי $y \in f(A) \backslash f(B)$. לכן:

$$(y \in f(A)) \wedge (y \notin f(B))$$

לכן קיים $a \in A$ עבורו $f(a) = y$ ולא קיים $b \in B$ עבורו $f(b) = y$. לכן $a \in A \backslash B$ ולכן $y \in f(A \backslash B)$.

לכן $f(A) \backslash f(B) \subseteq f(A \backslash B)$.

ג. נראה את ההכלה בכיוון השני. יהי $y \in f(A \backslash B)$. לכן קיים $a \in A \backslash B$ עבורו $f(a) = y$.

מכיוון שהפונקציה חח"ע, לא קיים איבר $b \neq a$ כך ש$-f(b) = y$.

מכיוון ש$a \in A \backslash B$, לכל $b \in B$ מתקיים $b \neq a$ ולכן לכל $b \in B$ מתקיים $f(b) \neq y$.

לכן $y \notin f(B)$. מצד שני, $a \in A$ ולכן $y \in f(A)$ ולכן $y \in f(A) \backslash f(B)$.

אם כן, $f(A \backslash B) \subseteq f(A) \backslash f(B)$ ובעזרת סעיף ב' נקבל שיוויון.