חודא 1 להנדסה תשפב מועד ב

25 בפברואר 2022

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+\sin(x))\sin^4(2x)}{1-\cos(x^2)}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^x+\sin(x)\right)\sin^4(2x)}{1-\cos(x^2)}=\lim_{x\to 0}\ln\left(e^x+\sin(x)\right)\cdot\frac{\sin^4(2x)}{(2x)^4}\cdot\frac{x^4}{1-\cos(x^2)}\cdot 2^4$$
$$=\ln\left(e^0+\sin(0)\right)\cdot 1^4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^4=0$$

בגלל ש $\ln\left(e^0+\sin(0)\right)=\ln(1+0)=0$.

(ב) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^2-3x+2}$

פתרון: כיוון ש $1^2-3\cdot 1+2=0$, נחשב את הגבול בעזרת לופיטל:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^2-3x+2}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x-3}=\frac{1}{2-3}=-1$$

(ג) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$

פתרון: כיוון שבקטע $(0,1]$ הפונקציה $\sin(x)$ חיובית (היא חיובית ב $(0,\pi)$), נוכל להשתמש בכלל המנה: נגדיר $a_n=\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ ונחשב

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

ואז לפי כלל המנה גם $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}=$. נחשב:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{\frac{1}{n}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{n+1}{n}\to 1\cdot 1\cdot 1=1$$

מכיוון ש $n\to\infty$ גורר כי $\frac{1}{n},\frac{1}{n+1}\to 0$ וידוע הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ ולכן לפי קריטריון היינה השקול כל סדרה $b_n\to 0$ מקיימת כי $\frac{\sin(b_n)}{b_n}\to 0$.

.2

(א) חשבו $\int \frac{2x^3+6x^2+8x+5}{(x+1)(2x^2+2x+1)}\mathrm{d}x$.
פתרון: המונה הוא

$$(x+1)\left(2x^2+2x+1\right) = 2x^3+4x^2+3x+1$$

ונתחיל עם חילוק פולינומים (שהרי המונה והמכנה עם אותה דרגה ונרצה שהדרגה של המונה קטנה ממש מדרגת המכנה). כיוון ששני הפולינומים מדרגה 3 עם אותו גורם $2x^3$, אז

$$\left(2x^3+6x^2+8x+5\right) - \left(2x^3+4x^2+3x+1\right) = 2x^2+5x+4$$

ואפשר לחסוך את האלגוריתם של חילוק פולינום וישר לקבל

$$\int \frac{2x^3+6x^2+8x+5}{(x+1)(2x^2+2x+1)}\mathrm{d}x = \int \frac{\left(2x^3+4x^2+3x+1\right)+\left(2x^2+5x+4\right)}{(x+1)(2x^2+2x+1)}\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x + \int \frac{\left(2x^2+5x+4\right)}{(x+1)(2x^2+2x+1)}\mathrm{d}x$$

כמובן ש $\int 1\mathrm{d}x = x+C$ ונשאר לטפל באינטגרל השני. לפי פירוק לשברים חלקים, קיימים A,B,C כך ש

$$\frac{\left(2x^2+5x+4\right)}{(x+1)(2x^2+2x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{2x^2+2x+1}$$

(נשים לב ש $2x^2+2x+1$ גורם אי פריק שהרי $2^2-4\cdot 2\cdot 1<0$). נעשה מכנה משותף והשוואת מונים לקבל

$$\left(2x^2+5x+4\right) = A\left(2x^2+2x+1\right) + (Bx+C)(x+1)$$

נציב $x=-1$ לקבל ש $A=1$ ולכן

$$\left(2x^2+5x+4\right) = \left(2x^2+2x+1\right) + (Bx+C)(x+1)$$

כלומר

$$(3x+3) = (Bx+C)(x+1)$$

וכעת, לכל $x\neq -1$ נקבל ש $x+1\neq 0$ ונוכל לחלק את שני צידי המשוואה לקבל

$$3 = Bx+C$$

ולכן $C=3$ ו $B=0$. לכן

$$\int \frac{\left(2x^2+5x+4\right)}{(x+1)(2x^2+2x+1)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x + \int \frac{3}{2x^2+2x+1}\mathrm{d}x = \ln|x+1| + 3\int \frac{1}{2x^2+2x+1}\mathrm{d}x$$

ונמשיך למצוא את $\int \frac{1}{2x^2+2x+1}\mathrm{d}x$ בעזרת השלמה לריבוע:

$$\int \frac{1}{2x^2+2x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}\int \frac{1}{\left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{\left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\mathrm{d}x$$

והצבה של $\begin{matrix} t = 2\left(x+\frac{1}{2}\right) \\ \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x \end{matrix}$ תתן

$$2\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{2}\right)^2+1}\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{t^2+1}\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \arctan(t)+C = \arctan\left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+C$$

ולכן בסה"כ, התשובה הסופית היא

$$\int \frac{2x^3+6x^2+8x+5}{(x+1)\left(2x^2+2x+1\right)}\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x + \int \frac{\left(2x^2+5x+4\right)}{(x+1)\left(2x^2+2x+1\right)}\mathrm{d}x$$
$$= x+\ln|x+1| + 3\cdot \arctan\left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+C$$

(ב) קבוע האם האינטגרל הבא מתכנס או לא $\int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

פתרון: הוכחה: כיוון ש

$$\frac{\frac{1}{x^2+\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(x^{1.5}+1\right)} = \frac{1}{x^{1.5}+1} \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{0+1} = 1$$

נקבל ש $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ ו $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ חברים (שני האינטגרלים חיובים ב $(0,1)$ ולכן אפשר להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי). בגלל ש $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ מתכנס כך גם האינטגל שבשאלה (הגבול בין הפונקציות הוא 1 שהוא מספר סופי שונה מאפס).

3. עבור הפונקציה $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ המוגדרת עבור $x>0$, ענו על הבאים:

(א) מצאו את תחומי העליה והירידה של f.

פתרון: כיוון ש

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

נקבל ש:

$$f'(x) = \left(e^{\frac{\ln(x)}{x}}\right)' = e^{\frac{\ln(x)}{x}}\cdot\left(\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right)$$

ומכיוון ש $x^2, x^{\frac{1}{x}}$ חיוביים לכל $x>0$, נקבל ש: $f'=0$ אמ"מ $1-\ln x=0$ שזה קורה אמ"מ $\ln(x)=1$ שזה קורה רק עבור $x=e$. מהטבלה

x	0	1	e	e^2
$f'(x)$	Ud	$+$	0	$-$

נסיק כי f עולה ממש בקטע $(0,e)$ ויורדת ממש בקטע (e,∞). בנוסף, נסיק כי $x=e$ נקודת מקסימום של f.

(ב) לכל a ממשי, מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=a$.

פתרון: ראינו בסעיף קודם כי $x=e$ נקודת מקסימום של f. לכן הערך המקסימאלי הוא $f(e)=e^{\frac{1}{e}}$. כעת, נבדוק מה קורה "בקצוות":

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}} = \left\{e^{\frac{-\infty}{0^+}} = e^{-\infty}\right\} = 0$$

וגם

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$$

כאשר המעבר האדום נובע ממשפט סדרי גודל, או בחישוב ישיר

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

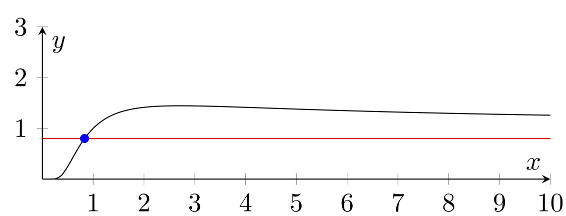
ולכן:

- לכל $a > e^{\frac{1}{e}}$ לא יהיה פתרון ל $f(x) = a$ כי $e^{\frac{1}{e}}$ הערך המקסימאלי ש f מקבלת.
- עבור $a = e^{\frac{1}{e}}$ יהיה פתרון אחד ל $f(x) = a$ כיוון שזה הערך המקסימאלי של f המתקבל ב $x = e$ ולכל x אחר מתקיים $f(x) < e^{\frac{1}{e}}$ (כי f יורדת/עולה ממש מימין/משמאל ל e).
- לכל $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ יהיו שני פתרונות ל $f(x) = a$ מכיוון שבקטע $(0, e)$ הפונקציה עולה ממש ולכן בקטע זה יכול להיות לכל היותר פתרון אחד. בנוסף, יהיה פתרון אחד מכיוון ש $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$ ולכן קיים $0 < c < e$ עבורו $f(c) < a$ ולכן בקטע $[c, e]$ הפונקציה f רציפה ולכן לפי משפט ערך הביניים בקטע זה מתקבל הערך a (שהרי $f(c) < a < f(e)$). לכן יש בדיוק פתרון אחד בקטע $(0, e)$. בנוסף בקרן (e, ∞) הפונקציה יורדת ממש ולכן לכל היותר פתרון אחד בקרן. ומכיוון ש

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

קיים $d > e$ כך ש $a > f(d)$ לכן בקטע $[e, d]$ יש פתרון ל $f(x) = a$ (בגלל ש f רציפה שם ו $f(e) > a, f(d) < a$). לכן סה"כ יהיה 2פתרונות בדיוק
- עבור $a = 1$ נקבל פתרון אחד ל $f(x) = a$ שהרי בקטע $(0, e)$ יהיה פתרון יחיד בדומה לנימוקים הקודמים ובקרן (e, ∞) לא יהיה פתרון שהרי הגבול באינסוף הוא 1 והפונקציה יורדת ממש בקרן זו.
- עבור $0 < a < 1$ נקבל פתרון אחד ל $f(x) = a$ בדומה לבולט קודם - יהיה פתרון יחיד בקטע $(0, e)$.
- עבור $a \le 0$ לא יהיה פתרון בכלל כי הקרן (e, ∞) הפונקציה גדולה מ 1 ובקטע $(0, e)$ הפונקציה גדולה (ממש!) מ 0 (שהרי היא עולה ממש בקטע זה ו**הגבול** שלה באפס מימין הוא 0. לכן $f > 0$ לכל $x > 0$.

בציור, זה נקודות חיתוך בין הקו האדום (שמייצג $y = 0.8$) לבין הקו השחור (שמייצג $y = x^{\frac{1}{x}}$)



.

4. תהא f הגזירה בכל הממשיים.

(א) הוכיחו או הפריכו: אם f' מתאפסת אינסוף פעמים אז ל f יש אינסוף נקודות קיצון מקומי.
פתרון: הפרכה: $f(x) = \sin(x) + x$ מקיימת כי $f'(x) = \cos(x) + 1$ שהיא מתאפסת אינסוף פעמים - בכל הנקודות $2\pi n + \pi$. אבל

$$f'(x) = \cos(x) + 1 \ge -1 + 1 = 0$$

ו f' לא מתאפסת באף קטע $[a, b]$ לכן f מונוטונית עולה ממש בכל $\mathbb{R}$. בפרט אין לה נקודות קיצון מקומי (הרי אם c היא נקודה מקס' מקומי של f אזי יש סביבה שלה בה $f(c)$ בעלת הערך הגבוה ביותר. כלומר קיים $c \in (a, b)$ כך שלכל x בקטע $f(x) \le f(c)$ ומכיוון ש f עולה ממש מתקיים $f(x) < f(c)$ לכל $c \ne x \in (a, b)$ אבל עבור $x = \frac{c+b}{2} > c$ שבקטע (a, b) גם מתקים $f(x) < f(c)$ בסתירה לכך ש f מונוטונית עולה. טיעון דומה עבור נקודת מיני' מקומי של f) .

(ב) הוכיחו או הפריכו: אם לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) \cdot f'(x) < 0$ אזי f מונוטונית בכל הממשיים (עולה או יורדת).
פתרון: הוכחה:נראה כי $f'(x) < 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$ (ואז f מונוטית יורדת) או $f'(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$ (אז f מונוטונית עולה). נניח בשלילה שלא כך, לכן קיימים x_1, x_2 כך ש

$$f'(x_1) < 0, f'(x_2) > 0$$

ומכיוון שנתון ש $f(x)\cdot f'(x)<0$ לכל x ממשי, נסיק ש

$$f(x_1)>0, f(x_2)<0$$

ומכיוון ש f גזירה, היא רציפה ובקטע בין x_1 ל x_2 היא מחליפה סימן, נסיק לפי משפט ערך הביניים שקיימת נקודה c בקטע בה $f(c)=0$. בפרט $f(c)\cdot f'(c)=0$ בסתירה לנתון שנובע ממנו כי $f(c)\cdot f'(c)<0$.

5. תהא סדרה a_n המקיימת לכל n כי $a_{n+1}-\left(a_{n+1}\right)^2=\left(a_n\right)^2+a_n$ וכן $a_n\le 2022$ לכל n.

(א) הוכיחו כי הסדרה a_n מונוטונית עולה.

פתרון:לפי הנתון לכל n מתקיים

$$a_{n+1}-\left(a_{n+1}\right)^2=\left(a_n\right)^2+a_n$$

או בהעברת אגפים

$$a_{n+1}-a_n=\left(a_n\right)^2+\left(a_{n+1}\right)^2\ge 0$$

ולכן $a_{n+1}\ge a_n$, כלומר הסדרה עולה.

(ב) נתון כי $a_1=-\frac{1}{2}$, מצאו את a_2 והוכיחו תשובתכם.

פתרון: לפי הנתון, עבור $n=1$, מתקיים כי

$$a_2-\left(a_2\right)^2=\left(a_1\right)^2+a_1=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

ולכן a_2 מקיים את המשוואה

$$\left(a_2\right)^2-a_2-\frac{1}{4}=0$$

שהפתרונות שלה הן

$$\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$$

כעת נראה שהאפשרות של $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ אינה אפשרית ולכן $a_2=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$. נתון שהסדרה חסומה מלמעלה ע"י 2022 ולכן, מכיוון שהיא מונוטונית עולה, נקבל שיש לה גבול סופי L. כלומר $a_n\to L$ ולכן גם $a_{n+1}\to L$. מהנתון שלכל n מתקיים

$$a_{n+1}-\left(a_{n+1}\right)^2=\left(a_n\right)^2+a_n$$

נסיק, ע"י גבול לשני האגפים כי

$$L-L^2\leftarrow a_{n+1}-\left(a_{n+1}\right)^2=\left(a_n\right)^2+a_n\to L^2+L$$

ולכן L מקיים $L-L^2=L^2+L$. זה גורר כי $2L^2=0$ ולכן $L=0$. כיוון שהסדרה עולה אזי לכל n מתקיים $a_n\le 0$ ולכן בפרט $a_2\le 0$ ולכן $a_2\ne\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ כפי שרצינו להוכיח.

.6

(א) חשבו את גבול הסדרה

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+3}{\left(n+k\right)^2}$$

פתרון: מתקיים ש

$$\frac{n}{\left(n+k\right)^2}=\frac{n}{n^2\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$$

לכן

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+3}{(n+k)^2}=\frac{n+3}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}=\frac{n+3}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{n+3}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$$

עבור $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$. מכיוון ש f רציפה ב $[0,1]$ אז לפי משפט מההרצאה

$$a_n=\frac{n+3}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)\to 1\cdot\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-(1+x)^{-1}\mid_0^1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

(ב) קרבו את $\frac{\sin(2)}{2}$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.
פתרון: נמצא קירוב t ל $\sin(2)$ עד כדי שגיאה של $\frac{1}{50}$, כלומר $|\sin(2)-t|<\frac{1}{50}$, ואז הקירוב שיענה על דרישת שאלה יהיה $\frac{t}{2}$ שהרי

$$\left|\frac{\sin(2)}{2}-\frac{t}{2}\right|=\frac{1}{2}\left|\sin(2)-t\right|<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{50}=\frac{1}{100}$$

כפי שנדרש בשאלה. נשתמש בפיתוח טיילור של $f(x)=\sin(x)$ סביב $a=0$ ונרצה לקרב את $f(2)$.

$$\begin{aligned}f(x)=\sin(x)&\Rightarrow f(0)=0\\ f'(x)=\cos(x)&\Rightarrow f'(0)=1\\ f''(x)=-\sin(x)&\Rightarrow f''(0)=0\\ f^{(4)}(x)=-\cos(x)&\Rightarrow f^{(4)}(0)=-1\\ f^{(5)}(x)=\sin(x)&\Rightarrow f^{(5)}(0)=0\\ &\vdots\end{aligned}$$

והנגזרות ממשיכות במחזוריות של 4,

$$\sin(x),\cos(x),-\sin(x),-\cos(x),\sin(x),\cos(x),-\sin(x),-\cos(x),\ldots$$

והערכים ב 0 הם

$$0,1,0,-1,0,1,0,-1,\ldots$$

ולכן נותר להעריך את השגיאה:הנגזרת ה n ית במקרה של f שלנו תהיה $\pm\sin(x)$ או $\pm\cos(x)$ ולכן, שארית טיילור מסדר $n-1$ תהיה חסומה

$$\left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(2-0)^n\right|\le\frac{2^n}{n!}$$

עבור איזה שהוא $0<c<2$ שלא משנה את החסם כי $\pm\sin(x)\backslash\cos(x)$ חסומים ע"י 1 לכל x. נרצה למצוא n כך ש $\frac{2^n}{n!}<\frac{1}{50}$. נבצע כמה הצבות ונגלה שעבור $n=8$

$$\frac{2^8}{8!}=\frac{256}{40320}<\frac{400}{40000}=\frac{1}{100}<\frac{1}{50}$$

יספיק לנו והקירוב המתקבל הוא

$$\begin{aligned}
t &= \sum_{k=0}^{8-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (2-0)^k \\
&= 0 + 1 \cdot 2^1 + 0 - \frac{1}{3!} \cdot 2^3 + 0 + \frac{1}{5!} \cdot 2^5 + 0 - \frac{1}{7!} \cdot 2^7 \\
&= 2 - \frac{8}{6} + \frac{32}{120} - \frac{128}{5040} \\
&= \frac{286}{315}
\end{aligned}$$

ולכן

$$\frac{t}{2} = \frac{286}{630}$$

הוא קירוב שיענה על דרישות השאלה.