פתרון מבחן מועד ב' – חדו"א 2 לאודיסאה- 86-148 – 24/08/23

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. נביט בפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

א. מצאו את טור הטיילור סביב אפס המתכנס ל$f(x)$.

נתחיל מהטור הידוע

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$e^x-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

כעת נחלק בx את שני הצדדים, וזה כמובן מותר רק כאשר $x\neq 0$

$$\frac{e^x-1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots$$

צד ימין מוגדר גם עבור $x=0$ ובאפס הוא שווה ל1

ולכן סה"כ עבור

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

מתקיים <u>לכל</u> $x\in\mathbb{R}$ כי

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}$$

ב. חשבו את $f^{(38)}(0)$.

נזכור כי לפי טיילור המקדם של x^{38} בטור הטיילור הוא

$$\frac{f^{(38)}(0)}{38!}$$

מצד שני, מצאנו את הטור ואנו רואים כי המקדם של x^{38} הוא

$$\frac{1}{39!}$$

לכן

$$\frac{f^{(38)}(0)}{38!} = \frac{1}{39!}$$

ולכן

$$f^{(38)}(0) = \frac{1}{39}$$

2. נביט בסדרת הפונקציות

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}$$

א. קבעו והוכיחו אם הסדרה מתכנסת במידה שווה בתחום $[-1,1)$.

ראשית, לכל $x \in (-1,1)$ מתקיים כי $x^n \to 0$ וכן $x^{n+1} \to 0$ ולכן $f(x) = 0$

כמו כן, עבור $x = 1$ מתקיים כי $f_n(1) = 0$ ולכן גם $f(1) = 0$

סה"כ בכל התחום $(-1,1]$ פונקצית הגבול היא $f(x) = 0$

כעת נחשב את סדרת החסמים

$$d_n = \sup_{x\in(-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(-1,1]} |x^n - x^{n+1} - 0|$$

נשים לב כי

$$\lim_{x\to-1} |x^n - x^{n+1}| = \lim_{x\to-1} |x^n(1-x)| = 2$$

ולכן

$$d_n \geq 2$$

ולכן d_n אינה שואפת לאפס, ואין התכנסות במ"ש.

ב. קבעו והוכיחו אם הסדרה מתכנסת במידה שווה בתחום $[0,1]$.

רוב הפתרון זהה עד לשלב חישוב סדרת החסמים

$$d_n = \sup_{[0,1]} |x^n - x^{n+1}|$$

נחשב את ערכי הקיצון של $x^n - x^{n+1}$ בקטע $[0,1]$.

יש שם מקס' ומינ' לפי ויירשטראס, אז הם מתחבאים בקצוות או בנקודות איפוס הנגזרת (הרי הפונקציה גזירה תמיד)

הנגזרת היא

$$nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x)$$

ולכן הנגזרת מתאפסת כאשר $x=0$ או $x=\frac{n}{n+1}$

בקצוות, הן אפס והן אחד מאפסים את הפונקציה, ולכן הם המינימום של $|x^n-x^{n+1}|$

לכן המקסימום יהיה בנק' החשודה היחידה שנותרה

$$d_n=\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right|=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

כעת נחשב את גבול סדרת החסמים

$$d_n\to\frac{1}{e}\cdot 0=0$$

ולכן יש התכנסות במ"ש.

דוגמא להעשרה:

נביט בסדרת הפונקציות

$$f_n(x)=x^n-x^{n+k}$$

האם לכל $k\in\mathbb{N}$ סדרת הפונקציה מתכנסת במ"ש בקטע $[0,1]$?

לפי הסבר דומה לעיל $f(x)=0$

$$d_n=\sup_{[0,1]}\left(x^n-x^{n+k}\right)$$

הורדתי את הערך המוחלט כי מדובר בפונקציה חיובית בתחום, בהנחה ש $k\in\mathbb{N}$

$$h(x)=x^n-x^{n+k}=x^n(1-x^k)$$

$$h'(x)=nx^{n-1}-(n+k)x^{n+k-1}=x^{n-1}\left(n-(n+k)x^k\right)$$

ידוע שבקצוות יש מינימום (כי זה כמו קודם), והחסם העליון הוא בנק'

$$x^k=\frac{n}{n+k}$$

$$x=\sqrt[k]{\frac{n}{n+k}}$$

$$d_n=h\left(\sqrt[k]{\frac{n}{n+k}}\right)=\left(\sqrt[k]{\frac{n}{n+k}}\right)^n\underbrace{\left(1-\frac{n}{n+k}\right)}_{\to 0}$$

כעת נעזר בכלל הe על הגבול הנותר

$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{n}{k}}\to e^{\lim\frac{n}{k}\cdot\left(\frac{n}{n+k}-1\right)}$$

$$\frac{n}{k}\cdot\left(\frac{n}{n+k}-1\right)=\frac{n}{k}\cdot\frac{-k}{n+k}\to -1$$

קיבלנו את אותה התוצאה כמו קודם והסדרה מתכנסת במ"ש.

העשרה אחרונה וזריזה (בלי הסברים)

$$f_n(x)=x^n-x^{2n}$$

$$h(x)=x^n-x^{2n}=x^n(1-x^n)$$

$$h'(x)=nx^{n-1}-2nx^{2n-1}=nx^{n-1}(1-2x^n)$$

שוב $x=0$ לא מעניין, אחרת

$$x^n=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

ולכן

$$d_n=h\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\nrightarrow 0$$

וסוף סוף אין התכנסות במ"ש ובורלא טועה.

3. תהי $u(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית.

נגדיר את הפונקציה $h(x,y)=u(x,y)+u(2y,3x)$

ונגדיר את הפונקציה $g(x)=u(u(x,x),e^x)$.

א. הביעו את $h_x(x,y)$ באמצעות u_x,u_y ופונקציות אלמנטריות.

$$h_x=u_x(x,y)+\left(u_x(2y,3x)\cdot 0+u_y(2y,3x)\cdot 3\right)=u_x(x,y)+3u_y(2y,3x)$$

ב. הביעו את $g'(x)$ באמצעות u_x,u_y ופונקציות אלמנטריות.

$$g'(x)=u_x(u(x,x),e^x)\cdot\frac{\partial}{\partial x}u(x,x)+u_y(u(x,x),e^x)\cdot\frac{\partial}{\partial x}e^x=$$

$$=u_x(u(x,x),e^x)\left[u_x(x,x)\cdot 1+u_y(x,x)\cdot 1\right]+u_y(u(x,x),e^x)e^x$$

4. נביט בפונקציה $f(x,y)=x-2y$

א. מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה $f(x,y)$ בתחום $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$

ראשית נמצא נקודות חשודות בפנים התחום

$$f_x=1\neq 0$$

לכן אין נקודות חשודות בפנים התחום.

נעבור לכופלי לגראנז'

$$g(x)=x^2+y^2-1$$

$$\begin{cases} f_x=\lambda g_x \\ f_y=\lambda g_y \\ g=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1=\lambda 2x \\ -2=\lambda 2y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

ברור כי $x,y\neq 0$ אחרת זה סותר את המשוואות הראשונות, לכן מותר לחלק בהם

$$\lambda=\frac{1}{2x}=-\frac{2}{2y}$$

$$\frac{1}{2x}=-\frac{1}{y}$$

$$2x=-y$$

$$x^2+4x^2=1$$

$$x^2=\frac{1}{5}$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

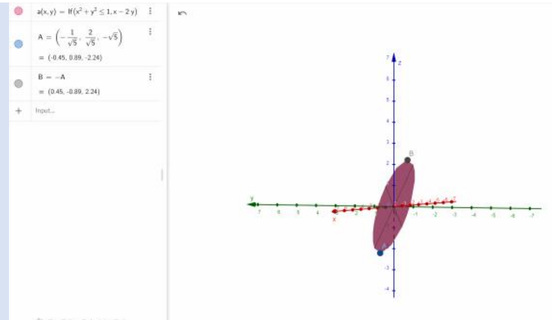
$$y=\mp\frac{2}{\sqrt{5}}$$

קיבלנו זוג נקודות חשודות נציבן בפונקציה

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{5}{\sqrt{5}}=-\sqrt{5}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\sqrt{5}$$

וסה"כ המקסימום המוחלט בתחום הוא $\sqrt{5}$ והמינימום הוא $-\sqrt{5}$



ב. מצאו פונקציה $g(x,y)$ כך שהמישור $z=f(x,y)$ הוא המישור המשיק ל$g(x,y)$ בנקודה $(1,1)$.

כל מישור משיק לעצמו בכל נקודה, כיוון ש $f(x,y)$ מישור אפשר לבחור $g(x,y)=f(x,y)$

5. רמי הכין עוגה שהתחתית שלה היא התחום $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ וגובהה הוא $f(x,y)=x+y+\sqrt{2}$.
מצאו את שטח הפנים הכולל של העוגה של רמי (תחתית, קירות ותקרת העוגה).

הרצפה היא מעגל היחידה ולכן שטחה הוא π

כעת נעשה אינטגרל קווי מסוג ראשון על שפת הרצפה של f על מנת לחשב את שטח הקירות.

הפרמטריזציה של שפת הרצפה היא

$$\vec{r}(t)=(\cos(t),\sin(t)),\quad t\in[0,2\pi]$$

$$\int_C f dr=\int_0^{2\pi} f(\vec{r}(t))\sqrt{(-\sin(t))^2+\cos^2(t)}\,dt=\int_0^{2\pi}(\cos(t)+\sin(t)+\sqrt{2})dt=$$

$$\left[\sin(t)-\cos(t)+\sqrt{2}\right]_0^{2\pi}\underset{\text{לפי לוינסון}}{=}\sqrt{2}\cdot 2\pi$$

אגב, ללוינסון יש יום הולדת היום. לא, לא ביום שאתם קוראים את זה, אלא ביום שכתבתי. אמנם ייתכן, תלוי מתי קראתם.

נעבור כעת לאינטגרל משטחי מסוג ראשון על משטח התקרה של הפונקציה $f=1$ על מנת לקבל את שטח התקרה.

$$\vec{s}(r,t)=\left(r\cos(t),r\sin(t),r\cos(t)+r\sin(t)+\sqrt{2}\right)$$

$$r\in[0,1]$$

$$t\in[0,2\pi]$$

$$\vec{s}_r\times\vec{s}_t=\det\begin{pmatrix} i & j & k\\ \cos(t) & \sin(t) & \cos(t)+\sin(t)\\ -r\sin(t) & r\cos(t) & -r\sin(t)+r\cos(t)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{aligned}&=(-r\sin^2(t)+r\sin(t)\cos(t)-r\cos^2(t)-rcos(t)\sin(t),\\ &-r\sin^2(t)-r\sin(t)\cos(t)+r\sin(t)\cos(t)-rcos^2(t),\\ &r\cos^2(t)+r\sin^2(t))=(-r,-r,r)\end{aligned}$$

ולכן

$$|\vec{s}_r \times \vec{s}_t| = \sqrt{r^2 + r^2 + r^2} = \sqrt{3}r$$

$$\iint_M 1dS = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 1 \cdot \sqrt{3} \cdot rdt\right) dr = 2\pi\sqrt{3} \int_0^1 rdr = 2\pi\sqrt{3} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \sqrt{3}\pi$$

סה"כ שטח הפנים הוא

$$\sqrt{3}\pi + 2\sqrt{2}\pi + \pi$$

6. נביט בתחום חצי מעגל היחידה במישור $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$,
נביט במסילה שהפרמטריזציה שלה היא

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$$
$$t \in [0, \pi]$$

ונביט בשדה הוקטורי

$$\vec{F} = (e^x y)\hat{\imath} + (x + e^x)\hat{\jmath}$$

חשבו את האינטגרל הקווי מסוג שני של השדה הוקטורי על המסילה C:

$$\int_C \vec{F} d\vec{r}$$

אנחנו רוצים להשתמש במשפט גרין, כי מי משוגע מספיק על מנת לחשב במישרין את האינטגרל, חוץ מהמתרגלת (מסתבר).

נשים לב כי C אינה שווה בדיוק לשפת התחום. אבל נוסיף את המסילה C_1 כך ש

$$T = C \cup C_1$$

תהיה המסילה של שפת התחום נגד כיוון השעון.

$$\vec{r_1}(t) = (-1 + t, 0)$$
$$t \in [0,2]$$

לפי גרין

$$\oint_T \vec{F} d\vec{r} = \iint_D curl(\vec{F})$$

אבל

$$\oint_T \vec{F} d\vec{r} = \oint_C \vec{F} d\vec{r} + \oint_{C_1} \vec{F} d\vec{r}$$

ולכן סה"כ

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_D curl(\vec{F}) - \oint_{C_1} \vec{F} d\vec{r}$$

ראשית נחשב את ה$curl$

$$curl(\vec{F}) = 1 + e^x - e^x = 1$$

$$\iint_D curl(\vec{F}) = \iint_D 1$$

וזה שטח התחום שהוא חצי מעגל היחידה כלומר $\frac{\pi}{2}$.

כעת נחשב את

$$\oint_{C_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^2 \vec{F}(\vec{r_1}(t)) \cdot (1,0)dt = \int_0^2 (0,*) \cdot (1,0)dt = 0$$

ולכן סה"כ

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \frac{\pi}{2}$$

בדיקה: ננסה חישוב ישיר בלי גרין, ובטח אעזר בוולפראם כי זה אינטגרל מגעיל.

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_0^\pi \left(e^{\cos(t)} \sin(t), \cos(t) + e^{\cos(t)}\right) \cdot (-\sin(t), \cos(t))dt =$$

$$= \int_0^\pi \left(-\sin^2(t)\, e^{\cos(t)} + \cos^2(t) + \cos(t)\, e^{\cos(t)}\right)dt$$

ואכן וולפראם פתר: