בפעם שעברה, טענו שהמשוואה $\left\langle \gamma(s)-\gamma(0),\hat{B}\right\rangle =0$ אומרת שהעקומה γ "חיה" בתוך מישור יחיד. נביא הסבר יותר משכנע.

תזכורת: משוואת מישור ב$\mathbb{R}^3$ היא $Ax+By+Cz=D$. אם נסמן בקיצור $\vec{x}=(x,y,z)$, נוכל לרשום את משוואת המישור בצורה $\left\langle \vec{x},\vec{N}\right\rangle =D$ כאשר $\vec{N}=(A,B,C)$ הוא הנורמל למישור.

המשוואה מהתרגיל שעבר:

$$\left\langle \gamma(s)-\gamma(0),\hat{B}\right\rangle =0$$

$$\left\langle \gamma(s),\hat{B}\right\rangle -\left\langle \gamma(0),\hat{B}\right\rangle =0$$

$$\left\langle \gamma(s),\hat{B}\right\rangle =\left\langle \gamma(0),\hat{B}\right\rangle$$

זוהי משוואת מישור עבור
$$\begin{array}{rcl} \vec{x} & = & \gamma(s)\\ \vec{N} & = & \hat{B}\\ D & = & \left\langle \gamma(0),\hat{B}\right\rangle \end{array}.$$

הגדרה

בהינתן משטח M, עם מפות חופפות φ_i,φ_j, ניתן לבנות העתקת מעבר מהצורה

$$\varphi_i^{-1}\circ\varphi_j=:\varphi_{ij}$$

נדרוש תמיד שההעתקות תהיינה חלקות.

תרגיל

הוכיחו שעבור הגליל $M=\left\{ x^2+y^2=1\right\}$, המפות

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1:(0,2\pi)\times(-\infty,\infty) & \to & M\\ \varphi_1(u,v) & = & (\cos u,\sin u,v)\\ \varphi_2:(-\pi,\pi)\times(-\infty,\infty) & \to & M\\ \varphi_2(u,v) & = & (\cos u,\sin u,v) \end{array}$$

יוצרות העתקות מעבר חלקות

(בפעם שעברה המפה השנייה הייתה
$$\begin{array}{rcl} \varphi_2:(0,2\pi)\times(-\infty,\infty) & \to & M\\ \varphi_2(u,v) & = & (\cos(u+\pi),\sin(u+\pi),v) \end{array}$$
)

פתרון

המפות φ_1, φ_2 חופפות בכל הגליל, חוץ משני ישרים($x = \pm 1$). נוכיח שבהעתקת המעבר $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ חלקה.

קודם כל נראה מתי לביטוי $\varphi_2^{-1}\left(\varphi_1(u,v)\right)$ יש משמעות(תחום הגדרה).

ובכן, עבור $(u,v) \in (0,2\pi) \times (-\infty,\infty)$, $\varphi_1(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ ונרצה להפעיל על זה את φ_2^{-1}.

אסור שהנקודה $\varphi_1(u,v) \in M$ תיפול על הישר $(x = -1)$, כי φ_2^{-1} לא מוגדרת שם.

מסקנה: תחום ההגדרה הוא

$$x\left(\varphi_1(u,v)\right) \neq -1$$

(כאשר $x(P)$ הוא שיעור הx של P)

$$x\left((\cos u, \sin u, v)\right) \neq -1$$

$$\cos u \neq -1$$

$$u \neq \pi$$

מסקנה: לביטוי $\left(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1\right)(u,v)$ יש משמעות רק אם $u \neq \pi$.

נחשב סוף סוף את

$$\varphi_2^{-1}\left(\varphi_1(u,v)\right) \qquad \begin{array}{c} 0 < u < 2\pi \\ -\infty < v < \infty \end{array} \qquad u \neq \pi$$

נסמן:

$$\varphi_2^{-1}\left((\cos u, \sin u, v)\right) = (t,s)(u,v)$$

מקבלים מיד

$$s = v$$

$$\begin{cases} \cos t = \cos u \\ \sin t = \sin u \end{cases}$$

- אם $0 < u < \pi$(תחום I) מותר לקחת $t = u$(וזה יהיה בתחום U_2)
- אם $\pi < u < 2\pi$(תחום II) ניקח $t = u - 2\pi$ כך ש$-\pi < t < 0$.

בסיכום:

$$\left(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1\right)(u,v) = (t,s) = \begin{cases} (u,v) & 0 < u < \pi \\ (u-2\pi, 0) & \pi < u < 2\pi \end{cases}$$

ובכל מקרה ניתן לגזור את זה לפי u כמה שרוצים וגם לפי v כמה שרוצים $\Longleftarrow$ $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ חלקה.

הגדרה

נאמר שהמפה $\varphi : U \to M$ רגולרית אם בכל נקודה P, היעקוביאן $J_{\varphi(P)}$ הוא מדרגה מקסימלית.

אם לא נאמר אחרת, נדרוש מהמפות להיות רגולריות.

תרגיל

הוכיחו שהמפות שלנו φ_1, φ_2 רגולריות

פתרון

נוכיח עבור המפה φ_1:

$$\varphi_1 (u, v) = (\cos u, \sin u, v) = \partial (\cos u, \sin u, v)$$

$$J_{\varphi_2(u,v)} = \frac{\partial (\cos u, \sin u, v)}{\partial (u, v)}$$

$$J_{\varphi_1(u,v)} = \begin{bmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{rank } J_{\varphi_1} \geq 1$ כי השורה השלישית לא מתאפסת. למעשה, $\text{rank } J_{\varphi_1} = 2$ כי $\sin, \cos$ לא מתאפסים ביחד, ולכן לכל u, v תהיה שורה נוספת שלא מתאפסת(הראשונה או השנייה) ובת"ל בשורה השלישית.

מכאן $\text{rank } J_{\varphi_1} \equiv$ וφ_1 רגולרית.

יש להוכיח אותו דבר לגבי J_{φ_2}.

הגדרה

תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ חלקה, $P \in \mathbb{R}^n$ נקודה, $\gamma (t)$ עקומה המקיימת $\gamma (0) = P$.

הדיפרנציאל של f בנקודה P מוגדר ע"י

$$\mathrm{d}_P f (\gamma' (0)) := (f \circ \gamma)' (0)$$

אם $\gamma' (0) = v$ ניתן לחשב ע"י $\mathrm{d}_P f (v) = J_{f(P)} \cdot v$.

תרגיל

תהי $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ מוגדרת ע"י

$$f (x, y) = \left(x + \sin y, \ln \left(x^2 + 1\right)\right)$$

חשבו את $\mathrm{d}f_P (v)$ בנקודה $P = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ ולכל נקודה $v \in \mathbb{R}^2$.

פתרון - נפתור בשתי הדרכים:

דרך א' - ע"י עקומה

יש למצוא עקומה $\gamma(t)$ המקיימת $\begin{matrix}\gamma(0)=\begin{pmatrix}1\\ \frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\\ \gamma'(0)=v=\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\end{pmatrix}\end{matrix}$. למשל $\gamma(t)=\begin{pmatrix}1\\ \frac{\pi}{2}\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+t\cdot v^1\\ \frac{\pi}{2}+t\cdot v^2\end{pmatrix}$.

$$\mathrm{d}_P f\left(\gamma'(0)\right)=\mathrm{d}_P f(v)=(f\circ\gamma)'(0)$$

מה זה $(f\circ\gamma)(t)$?

$$f(\gamma(t))=f\left(1+tv^1,\frac{\pi}{2}+t\cdot v^2\right)=\left(1+t\cdot v^1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\cdot v^2\right),\ln\left(2+2tv^1+t^2v^{1^2}\right)\right)$$

$$(f\circ\gamma)'(0)=\left(v^1+\cancel{v^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+tv^2\right)},\frac{2v^1+2tv^{1^2}}{2+2tv^1+t^2v^{1^2}}\right)=\left(v^1,v^1\right)$$

דרך ב'

$$J_f=\frac{\partial\left(x+\sin y,\ln\left(x^2+1\right)\right)}{\partial(x,y)}=\begin{bmatrix}1 & \cos y\\ \frac{2x}{x^2+1} & 0\end{bmatrix}$$

$$J_f(P)=J_f\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\qquad J_f(P)\cdot\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^1\\ v^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v^1\\ v^2\end{bmatrix}$$

הגדרה

תהי $r(u_1,u_2):U\to\mathbb{R}^3$ מפה רגולרית, כלומר $\operatorname{rank} J_r\equiv 2$.
וקטורי הנגזרות החלקיות

$$\frac{\partial r}{\partial u_1}=\left(\frac{\partial r_1}{\partial u_1},\frac{\partial r_2}{\partial u_1},\frac{\partial r_3}{\partial u_1}\right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u_2}=\left(\frac{\partial r_1}{\partial u_2},\frac{\partial r_2}{\partial u_2},\frac{\partial r_3}{\partial u_2}\right)$$

נקראים הוקטורים המשיקים, ובעזרתם מגדירים את ארבעת המספרים:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left\langle \frac{\partial r}{\partial u_1}, \frac{\partial r}{\partial u_1} \right\rangle \\ g_{12} &= \left\langle \frac{\partial r}{\partial u_1}, \frac{\partial r}{\partial u_2} \right\rangle \\ g_{21} &= \left\langle \frac{\partial r}{\partial u_2}, \frac{\partial r}{\partial u_1} \right\rangle \qquad (= g_{12}) \\ g_{22} &= \left\langle \frac{\partial r}{\partial u_2}, \frac{\partial r}{\partial u_2} \right\rangle \end{aligned}$$

המספרים g_{ij} נקראים "מקדמים של המטריקה" והמטריצה $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ נקראת "מטריקה". בעזרת (g_{ij}) ניתן לחשב אורכים ושטחים של קבוצות על המשטח M.

תרגיל

נניח כי $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ חלקה.

א. מצאו פרמטריזציה("מפה") רגולרית עבור המשטח M שמקיים $z = f(x, y)$.

ב. מצאו את המטריקה (g_{ij}) עבור פרמטריזציה זו.

פתרון

א.

$$r(u, v) = (u, v, f(u, v)) \qquad \begin{matrix} -\infty < u < \infty \\ -\infty < v < \infty \end{matrix}$$

(לחילופין אפשר לכתוב $(u, v) \in \mathbb{R}^2$)

נוכיח שהיא רגולרית:

$$J_{r(u,v)} = \frac{\partial (u, v, f(u, v))}{\partial (u, v)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix}$$

יש מינור 2×2 הפיך - וזה מבטיח $\text{rank } J \equiv 2$.

ב. וקטורי הנגזרות החלקיות:

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right) \qquad \frac{\partial r}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial u} \right\rangle = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2$$

$$g_{12} = \left\langle \frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial v} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = g_{21}$$

$$g_{22} = \left\langle \frac{\partial r}{\partial v}, \frac{\partial r}{\partial v} \right\rangle 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} & 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \end{pmatrix}$$