פתרון תרגיל בית 9 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1 (חימום)**.** תהי G חבורה ותהי $H \lhd G$ תת־חבורה נורמלית. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

א. אם ${}^{G}/_{H}$ ציקלית ולא טריוויאלית, אז G אבלית.

ב. אם ${}^{G}/_{H}$ סופית ולא טריוויאלית, אז G סופית.

פתרון.

א. נבחר $G = S_3$ ואת $H = A_3$ שראינו בכיתה שהיא נורמלית ב-S_3. החבורה ${}^{G}/_{H}$ מסדר 2 (שהוא ראשוני) ולכן ציקלית. אבל G אינה אבלית.

ב. נבחר $G = \mathbb{Z}$ ואת $H = 2\mathbb{Z}$. אז ${}^{G}/_{H} \cong \mathbb{Z}_2$ מסדר 2, אבל G אינסופית.

שאלה 2 (חימום)**.** מצאו את הסימן של התמורה

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n & 1 \end{pmatrix} \in S_{2n}$$

ושל התמורה $\tau \in S_{2n}$ המוגדרת לפי $\tau(i) = 2n + 1 - i$.

פתרון. בכתיב של מכפלת מחזורים זרים, התמורה σ היא המחזור $(1, 2, 3, \dots, 2n)$, והוא מאורך זוגי. לכן הסימן הוא -1 והתמורה אי-זוגית.

התמורה τ היא המכפלה $(1, 2n)(2, 2n-1)(3, 2n-2)\dots(n, n+1)$ של n חילופים, ולכן הסימן שלה הוא $(-1)^n$, כלומר כמו הזוגיות של n.

שאלה 3. תהי G חבורה ותהיינה H, K תת־חבורות נורמליות המקיימות $H \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי G איזומורפית לתת־חבורה של ${}^{G}/_{K} \times {}^{G}/_{H}$.

פתרון. נתבונן בהעתקה: $f\colon G \to {}^{G}/_{K} \times {}^{G}/_{H}$ המוגדרת לפי

$$f(g) = (gH, gK)$$

תחילה יש להוכיח שזהו הומומורפיזם. אכן, לכל $g_1, g_2 \in G$ מתקיים

$$f(g_1 g_2) = (g_1 g_2 H, g_1 g_2 K) = (g_1 H, g_1 K)(g_2 H, g_2 K) = f(g_1) f(g_2)$$

כשהשיוויון האמצעי נובע מהנורמליות של H ושל K. יהי $g \in \ker(f)$. כלומר מתקיים עבורו

$$f(g) = (gH, gK) = e_{{}^{G}/_{K} \times {}^{G}/_{H}} = (H, K)$$

ידוע לנו ש-$gH = H, gK = K$ אם ורק אם $g \in K$ וגם $g \in H$. כלומר

$$g \in H \cap K = \{e\}$$

אם כן, הגרעין של f הוא טריוויאלי ולכן f שיכון.

שאלה 4. בתרגיל הזה נראה שוב שאי אפשר לומר ששתי תמורות הן "צמודות סתם" מבלי לומר באיזו חבורה עובדים.

א. מצאו את מחלקת הצמידות של $(132) \in A_4$.

ב. תנו דוגמה לשתי תמורות שאינן צמודות ב-A_4, אבל כן צמודות ב-S_4. הוכיחו שהן גם צמודות ב-A_5. רמז: הביטו מעלה.

ג. הוכיחו שאם יש זוג תמורות שאינן צמודות ב-A_n, אך כן צמודות ב-S_n, אז הן גם צמודות ב-A_{n+2}.

פתרון.

א. מנוסחת ההצמדה ב-S_n אנחנו יודעים שכל התמורות הצמודות של (132) הן מחזורים מאורך 3. אבל במקרה זה, לא כל המחזורים מאורך 3 צמודים ל-(132). בפרט, אם $\sigma \in A_4$, אז

$$\sigma\,(132)\,\sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(3), \sigma(2))$$

חישוב מפורט ב-A_4 יראה כי מחלקת הצמידות היא $\{(234), (143), (124), (132)\}$.

ב. לפי החישוב בסעיף הקודם, התמורה (123) לא צמודה ל-(132) ב-A_4, אבל לפי מיון מחלקות הצמידות ב-S_n התמורות האלו צמודות ב-S_4. נחפש $\tau \in A_5$ כך ש-

$$\tau\,(132)\,\tau^{-1} = (\tau(1), \tau(3), \tau(2)) = (123)$$

אם נבחר את (23) נקבל שהתמורות צמודות, אך $(23) \notin A_5$. לכן נבחר $\tau = (45)\,(23)$ ונקבל שהן אכן צמודות, וגם ש-τ זוגית. דוגמה אחרת: מהצמדה בתמורה (14532) נקבל את (142).

ג. אם $a, b \in A_n$ לא צמודות ב-A_n, אך כן צמודות ב-S_n, אז קיימת $\sigma \in S_n$ כך ש-$\sigma a \sigma^{-1} = b$. בודאי ש-$\sigma \notin A_n$ שכן הנחנו כי a, b לא צמודות ב-A_n. לכן התמורה $\sigma \cdot (n+1, n+2)$ היא זוגית (מכפלה של שתי תמורות אי זוגיות) ובהצמדה של a נקבל

$$\sigma \cdot (n+1, n+2)\,a\,(\sigma \cdot (n+1, n+2))^{-1} = (n+1, n+2)\,(n+1, n+2)\,\sigma a \sigma^{-1} = b$$

ונעזרנו בכך ש-$(n+1, n+2)$ מתחלפת עם σ ועם a, כי התומכים זרים (אין להם מספרים משותפים שהן מזיזות). לכן a, b צמודות ב-A_{n+2}.

שאלה 5. יהי $n \geq 3$. הוכיחו כי תת־החבורה היחידה של S_n מאינדקס 2 היא A_n.
הדרכה: הניחו כי $H \leq S_n$ היא מאינדקס 2. הזכרו למה H תת־חבורה נורמלית ולמה לכל $\sigma \in S_n$ מתקיים $\sigma^2 \in H$. הוכיחו כי H מכילה את כל המחזורים מאורך 3, וסיימו לפי תרגיל מהכיתה.

פתרון. לפי ההדרכה, נניח עבור $H \leq S_n$ מתקיים $[S_n : H] = 2$. כל תת־חבורה מאינדקס 2 היא נורמלית. ראינו בכיתה תרגיל לפיו אם $N \lhd G$ תת־חבורה נורמלית מאינדקס n, אז $a^n \in N$ לכל $a \in G$. לכן לכל $\sigma \in S_n$ מתקיים כי $\sigma^2 \in H$. בפרט, לכל מחזור $(ijk) \in S_n$ מאורך שלוש מתקיים $(ijk)^2 = (ikj) \in H$. אבל הבחירה של i, j, k היא שרירותית, ולכן כל מחזור מאורך 3 שייך ל-H. בכיתה הוכחנו כי A_n נוצרת על ידי מחזורים מאורך 3, ולכן $A_n \subseteq H$. אבל האינדקס של A_n גם הוא 2, ולכן חייב להיות שיוויון $H = A_n$.

שאלה 6. תהיינה $G_1, \ldots, G_n$ חבורות ותהיינה $H_1, \ldots, H_n$ תת־חבורות נורמליות שלהן, בהתאמה (כלומר $H_i \lhd G_i$ לכל i).

א. הוכיחו כי $H_1 \times \cdots \times H_n \lhd G_1 \times \cdots \times G_n$.

ב. הוכיחו כי $\left(G_1\times\cdots\times G_n\right)/\left(H_1\times\cdots\times H_n\right)\cong {}^{G_1}\!/_{H_1}\times\cdots\times {}^{G_n}\!/_{H_n}$.

פתרון.

א. קל לראות כי $H_1\times\cdots\times H_n$ היא תת־חבורה של $G_1\times\cdots\times G_n$. כדי להראות שהיא נורמליות, נבדוק שהיא סגורה להצמדה באיבר של $G_1\times\cdots\times G_n$. יהיו

$$(g_1,\ldots,g_n)\in G_1\times\cdots\times G_n,\qquad (h_1,\ldots,h_n)\in H_1\times\cdots\times H_n$$

אז נחשב

$$\begin{aligned}(g_1,\ldots,g_n)(h_1,\ldots,h_n)(g_1,\ldots,g_n)^{-1}&=(g_1h_1,\ldots,g_nh_n)\left(g_1^{-1},\ldots,g_n^{-1}\right)\\&=\left(g_1h_1g_1^{-1},\ldots,g_nh_ng_n^{-1}\right)\end{aligned}$$

לכל $1\le i\le n$, תת־החבורה H_i נורמלית ב-G_i ולכן $g_ih_ig_i^{-1}\in H_i$. קיבלנו כי $\left(g_1h_1g_1^{-1},\ldots,g_nh_ng_n^{-1}\right)\in H_1\times\cdots\times H_n$, כדרוש.

ב. נעזר במשפט האיזומורפיזם הראשון (הבינו למה כך פותרים את שני הסעיפים הראשונים בבת אחת). מפני ש-$H_i\lhd G_i$, אזי ${}^{G_i}\!/_{H_i}$ חבורה לכל i, ולכן המכפלה הקרטזית ${}^{G_1}\!/_{H_1}\times\cdots\times {}^{G_n}\!/_{H_n}$ היא חבורה. נגדיר העתקה

$$\begin{aligned}\pi\colon G_1\times\cdots\times G_n&\to {}^{G_1}\!/_{H_1}\times\cdots\times {}^{G_n}\!/_{H_n}\\(g_1,\ldots,g_n)&\mapsto(g_1H_1,\ldots,g_nH_n)\end{aligned}$$

שקל לראות שהיא על, כי היא "מכפלה קרטזית" של הטלות. נבדוק שהיא הומומורפיזם:

$$\begin{aligned}\pi(g_1,\ldots,g_n)\,\pi(g'_1,\ldots,g'_n)&=(g_1H_1,\ldots,g_nH_n)(g'_1H_1,\ldots,g'_nH_n)\\&=(g_1g'_1H_1,\ldots,g_ng'_nH_n)=\pi(g_1g'_1,\ldots,g_ng'_n)\\&=\pi\left((g_1,\ldots,g_n)(g'_1,\ldots,g'_n)\right)\end{aligned}$$

אגב, לכל קבוצה של הומומורפיזמים $f_i\colon G_i\to K_i$ הפונקציה $f\colon\prod_i G_i\to\prod_i K_i$ המוגדרת כך שברכיב ה-i נקבל $g_i\mapsto f_i(g_i)$ היא הומומורפיזם. נחשב את הגרעין של π:

$$\begin{aligned}\ker\pi&=\left\{(g_1,\ldots,g_n)\in G_1\times\cdots\times G_n\,\middle|\,\pi(g_1,\ldots,g_n)=e_{G_1/H_1\times\cdots\times G_n/H_n}\right\}\\&=\left\{(g_1,\ldots,g_n)\in G_1\times\cdots\times G_n\,|\,(g_1H_1,\ldots,g_nH_n)=(H_1,\ldots,H_n)\right\}\\&=\left\{(g_1,\ldots,g_n)\in G_1\times\cdots\times G_n\,|\,\forall i: g_i\in H_i\right\}=H_1\times\cdots\times H_n\end{aligned}$$

ולפי משפט האיזומורפיזם הראשון נקבל את הדרוש.

שאלה 7. נראה שאיזומורפיות בתת־חבורות נורמליות ובחבורות המנה ביחד עדין לא גורר איזומורפיות בחבורה "למעלה".

מצאו חבורות G_1,G_2 ותת־חבורות נורמליות שלהן $H_1\lhd G_1$ ו-$H_2\lhd G_2$ כך שגם $H_1\cong H_2$ וגם $G_1/H_1\cong G_2/H_2$, אבל G_1 לא איזומורפית ל-G_2.

נסו למצוא דוגמאות מסוגים שונים: נסו כאשר G_1 אבלית ואילו G_2 לא אבלית (אפשר לעשות זאת למשל כאשר שתיהן מסדר 6 או 8), או כאשר שתיהן חבורות-p אבליות.

פתרון. כמו ברמז נבחר $G_1=\mathbb{Z}_6$ ו-$G_2=S_3$. ראינו שלשתיהן יש תת־חבורות מסדר 3, $H_1=\langle 2\rangle=\{0,2,4\}$ ו-$H_2=A_3$. תת־החבורות H_i הן מאינדקס 2, ולכן נורמליות ב-G_i, בהתאמה. כל חבורה מסדר 3 איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_3$ וחבורות המנה ${}^{G_i}\!/_{H_i}$ הן מסדר $\frac{6}{3}=2$, ולכן איזומורפיות ל-$\mathbb{Z}_2$. לכן $H_1\cong\mathbb{Z}_3\cong H_2$ וגם ${}^{G_1}\!/_{H_1}\cong\mathbb{Z}_2\cong {}^{G_2}\!/_{H_2}$.

בחירה פופלרית אחרת יכולה להיות החבורות $G_1=\mathbb{Z}_8$ ו-$G_2=D_4$, עם תת־חבורות שאיזומורפיות ל-$\mathbb{Z}_4$ והמנה לגביהן איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_2$.

למעשה לכל p ראשוני אפשר לבחור חבורות מסדר p^2. למשל נבחר את $G_1 = \mathbb{Z}_9$ ואת $G_2 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ שהן לא איזומורפיות (הראשונה ציקלית והשנייה לא). לשתיהן תת־חבורות מסדר 3 (למשל $\langle 3 \rangle \leq G_1$ ו-$\langle (1,0) \rangle \leq G_2$), וחבורות המנה לגביהן תהיינה מסדר 3. נקבל שוב ש-$H_1 \cong \mathbb{Z}_3 \cong H_2$, והפעם גם חבורות המנה איזומורפיות שתיהן ל-$\mathbb{Z}_3$.

שאלה 8. נתבונן בחבורה $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. יהיו $x_1, x_2 \in G$. הראו שתת־החבורה $H = \langle x_1, x_2 \rangle$ היא ציקלית וסופית. רמז: הציגו את x_1, x_2 כמחלקות שמאליות, ואז נסו להבין כיצד נראה איבר כלשהו ב-H.

ג. מצאו קבוצת איברים $S \subseteq G$ כך שתת־החבורה $K = \langle S \rangle$ היא אינסופית וגם $K \neq G$. רמז: למה S חייבת להיות אינסופית?

פתרון.

א. איבר היחידה בחבורה G הוא המחלקה $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + 0$. לכן יש למצוא לכל $x \in G$ מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ כך שנקבל $n \cdot x + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. שימו לב כי החבורה חיבורית ולכן למציאת הסדר "העלאה בחזקה" היא כפל ב-n.
כל איבר בחבורה אפשר לרשום בצורה $x = \frac{a}{b} + \mathbb{Z}$ עבור $b \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$. מכאן קל לראות כי $b \cdot \left(\frac{a}{b} + \mathbb{Z}\right) = a + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. לכן x הוא לכל היותר מסדר (סופי) b. נניח כי $\frac{a}{b}$ הוא שבר מצומצם, ולכן הסדר של x במקרה זה הוא בדיוק b. ברור שסדרת השברים $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ מתאימה לסדרה של איברים ב-G שסדרם עולה ממש.
מינוח: החבורה G היא דוגמה לחבורה מפותלת מאקספוננט אינסופי.

ב. האיברים ב-G הם מחלקות שמאליות של $\mathbb{Z}$ ב-$\mathbb{Q}$. כלומר אם $x_i \in G$ עבור $i \in \{1,2\}$, אז קיימים $b_i \in \mathbb{N}$ ו-$a_i \in \mathbb{Z}$ כך ש-$x_i = \frac{a_i}{b_i} + \mathbb{Z}$. מפני ש-$G$ היא מנה של החבורה $\mathbb{Q}$ שהיא אבלית, אז גם G אבלית. לכן יש לנו תיאור נוח לאיברים בתת־חבורה הנוצרת על ידי קבוצת איברים:

$$\begin{aligned} H &= \left\{ k_1 \left(\frac{a_1}{b_1} + \mathbb{Z} \right) + k_2 \left(\frac{a_2}{b_2} + \mathbb{Z} \right) \middle| k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ \frac{k_1 a_1 b_2 + k_2 a_2 b_1}{b_1 b_2} + \mathbb{Z} \middle| k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \left\langle \frac{1}{b_1 b_2} + \mathbb{Z} \right\rangle \end{aligned}$$

כלומר H מוכלת בתת־חבורה ציקלית. ראינו בסעיף הקודם שהסדר של כל איבר הוא סופי. לכן הסדר של כל תת־חבורה ציקלית של G היא סופית, ולכן H סופית. בנוסף, כל תת־חבורה של חבורה ציקלית היא ציקלית, ולכן H ציקלית.

ג. אפשר לבחור את $S = \left\{ \frac{1}{5^i} + \mathbb{Z} \,\middle|\, i \in \mathbb{N} \right\}$, או את $S' = \left\{ \frac{1}{p} + \mathbb{Z} \,\middle|\, p \text{ prime} \wedge p \neq 7 \right\}$.
קל לראות כי $\langle S \rangle$ ו-$\langle S' \rangle$ אינסופיות כי יש בהן איברים מאינסוף סדרים שונים. בפירוט: ב-S האיבר $\frac{1}{5^i} + \mathbb{Z}$ הוא מסדר 5^i, ויש אינסוף בחירות עבור i. ב-S' האיבר $\frac{1}{p} + \mathbb{Z}$ הוא מסדר p, וישנם אינסוף ראשוניים השונים מ-7.
תת־החבורות האלו הן לא כל G מפני ששתיהן לא מכילות את האיבר $\frac{1}{7} + \mathbb{Z}$. אילו היה ניתן להציג אותו כמכפלה של היוצרים והופכיהם, אז

$$\frac{1}{7} + \mathbb{Z} = \left(\frac{1}{b_1} + \mathbb{Z} \right)^{\pm 1} \cdots \left(\frac{1}{b_k} + \mathbb{Z} \right)^{\pm 1} = \frac{a}{\operatorname{lcm}(b_1, \ldots, b_k)} + \mathbb{Z}$$

כאשר $\frac{1}{b_i} + \mathbb{Z}$ שייכים ל-S או S' ו-$a \in \mathbb{Z}$ מתאים (השבר באגף ימין לאו דווקא מצומצם). אבל $\operatorname{lcm}(b_1, \ldots, b_k)$ לא מתחלק ב-7 לפי בחירת S ו-S', וזה לא ייתכן

כי כל נציג אחר של $\mathbb{Z} + \frac{1}{7}$ כשבר מצומצם הוא מן הצורה $\mathbb{Z} + \frac{7a'+1}{7}$ עבור $a' \in \mathbb{Z}$.
תשובה לרמז: הסיבה היא שכל תת־חבורה של G הנוצרת על ידי מספר סופי של איברים היא סופית, ואפילו ציקלית.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה שלחו לנו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. תהי G חבורה. נקרא לתת־חבורה של G נאותה אם היא מוכלת ממש ב-G.

א. הוכיחו ש-G אינה איחוד של שתי תת־חבורות נאותות. כלומר שאם $G = H \cup K$, אז $G = H$ או $G = K$.

ב. תנו דוגמה לחבורה מסדר 4 שהיא איחוד של שלוש תת־חבורות נאותות שלה.

ג. מעתה נניח כי G היא איחוד של שלוש תת־חבורות נאותות, $G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$. הוכיחו כי חיתוך של כל שתיים מתת־החבורות שווה לחיתוך שלושתן $H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

ד. הוכיחו כי לכל $x \in G$ מתקיים $x^2 \in H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

ה. הסיקו כי $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \lhd G$.

ו. הוכיחו שהאינדקס של החיתוך ב-G הוא 4. הראו שחבורת המנה ביחס לחיתוך איזומורפית לדוגמה שנתתם בסעיף השני.

בהצלחה!