שיעורי בית 4

.

1. הגדרה: יהיו $(G_1,\star),(G_2,*)$ חבורות אזי גם $G_1\times G_2=\{(g_1,g_2)\,|\,g_1\in G_1,\,g_2\in G_2\}$ חבורה ביחס לפעולה $\bullet$ המוגדרת ע"י:

$$(g_1,g_2)\bullet(\tilde{g}_1,\tilde{g}_2)=(g_1\star\tilde{g}_1,g_2*\tilde{g}_2)$$

היחידה היא (e_{G_1},e_{G_2}) וההופכי של כל איבר $(g_1,g_2)\in G_1\times G_2$ הוא: $(g_1,g_2)^{-1}=\left(g_1^{-1},g_2^{-1}\right)$. לחבורה זו קוראים המכפלה (הקרטיזית) של G_1 ו G_2. למשל, $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ שראינו בתירגול. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $G_1\times G_2$ ציקלית אז גם G_1,G_2 ציקליות.

(ב) אם G_1 וגם G_2 ציקליות אז $G_1\times G_2$ ציקלית.

2. הוכיחו כי החבורות הבאות אינן ציקליות:

(א) S_n עבור $n>2$.

(ב) $\mathbb{Q}$.

(ג) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6$.

3. מצאו את הסדרים של האיברים הבאים:

(א) $\sigma=(1,2)\,(3,4,2)\in S_5$.

(ב) באופן כללי: תהא $\sigma\in S_n$ ויהא $\sigma=\tau_1\cdots\tau_m$ הפירוק למחזורים זרים. אזי $o(\sigma)=lcm\,\{o(\tau_i)\}_{i=1}^m$ (כאשר lcm הוא הכפולה המשותפת המינמאלית. למשל $lcm\{2,8,20,10\}=40$).

(ג) $\tau\sigma\in D_4$.

(ד) $\tau\sigma \in D_5$.

(ה) $k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ בחבורת הקווטרניונים.

4. תהא G חבורה סופית, ויהיו $a, b \in G$. הוכיחו/הפריכו:

   (א) אם $o(ab) = o(a) \cdot o(b)$ אז a, b מתחלפים.

   (ב) $\langle a \rangle = \langle a^3 \rangle$.

   (ג) אם $b = a^4$ אז $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$.

   (ד) $\langle a \rangle = \langle a^{-1} \rangle$.

5. תהא G חבורה. $g \in G$. נניח כי $g^k = e$. הוכיחו כי

$$o(g)|k$$

כלומר הסדר של g מחלק את k.

הדרכה: בצעו חילוק עם שארית של k ב $o(g)$.

6. תהא G חבורה חילופית. יהיו $a, b \in G$ בעלי סדרים זרים. כלומר, נסמן $o(a) = n, o(b) = m$ אזי $\gcd(n, m) = 1$ (ל n, m אין מחלק משותף פרט ל־1). הוכיחו כי

$$o(ab) = m \cdot n$$

היעזרו בתרגיל מספר 5.

7. כמה יוצרים יש ל $\mathbb{Z}_6 = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$ (עם פעולת חיבור מדולו 6)?

8. תהא G חבורה ויהא $g \in G$ מסדר n. הוכיחו כי $o(g^k) = \frac{n}{\gcd(k,n)}$.

9. האם הקבוצות הבאות הן תת חבורות:

   (א) $A_n \subseteq S_n$ (כלומר, האם תת קבוצת התמורות הזוגיות היא תת חבורה של חבורות התמורות?).

(ב) $\{(i,j) | 1 \le i < j \le n\} \cup \{id\} \subseteq S_n$ (כלומר, היחידה ואוסף החילופים).

(ג) $\{0,2,4\} \subseteq \mathbb{Z}_5$.

(ד) $\{0,3\} \subseteq \mathbb{Z}_6$.

10. תהי G חבורת הקווטרניונים, ותהי $H \le G$ תת חבורה. הוכיחו: אם $j,k \in H$ אז $H = G$.