תרגיל מספר 9 מבנים אלגבריים

22 בינואר 2017

1. יהא $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינומס n. יהיו g_1, g_2 שני פולינומים מדרגה קטנה מ n. נתבונן במחלקות שקילות שלהם $[g_1], [g_2] \in {}^{\mathbb{F}[x]}/_{\langle f \rangle}$ הוכיחו כי

$$[g_1] = [g_2] \iff g_1 = g_2$$

2.

(א) יהא $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ ויהיה ${}^{\mathbb{F}[x]}/_{\langle f \rangle}$ חוג המנה ביחס לאידיאל $\langle f \rangle$. הוכיחו כי ${}^{\mathbb{F}[x]}/_{\langle f \rangle}$ שדה אמ"מ f ראשוני

(ב) יהא p מספר טבעי ראשוני ונגדיר $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$. הוכיחו כי אם $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ ראשוני מדרגה n אזי השדה ${}^{\mathbb{F}[x]}/_{\langle f \rangle}$ בעל p^n איברים.

3. עבור הפולינומים $a(x) = 1 + 2x^2, b(x) = 2 + x \in \mathbb{R}[x]$ ראינו בש.ב. הקודמים כי $1 = \gcd(a, b)$ ומתקיים

$$1 = \frac{1}{9}a(x) - \frac{2x-4}{9}b(x)$$

מצאו פולינום $f(x)$ המקיים

$$f(x) \equiv_{a(x)} x$$

$$f(x) \equiv_{b(x)} 5$$

[השתמשו ברעיון דומה למשפט השאריות הסיני]

4.

(א) יהא $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום עם $\deg(f) \leq 3$. הוכיחו כי $f(x)$ ראשוני אמ"מ ל $f(x)$ אין שורש (שורש של $f(x)$ הוא $a \in \mathbb{F}$ המקיים $f(a) = 0$)

.5

(א) הראו שיש בדיוק פולינום אי־פריק אחד ממעלה שניים ב $\mathbb{Z}_2[x]$.

(ב) העזרו בסעיף א כודי לקבוע האם $x^5 + x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ פריק.

(ג) העזרו בסעיף א כדי לקבוע האם $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ פריק.