חשבון אינפי 1
תרגיל 5 - פתרון

1. מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות והסבירו מדוע אלה כולם:

א. $$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{n-7\left[\frac{n}{7}\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$$

פתרון :

נתבונן בתתי סדרה הבאות:

$$\{a_{7n+i}\}_{n=1}^{\infty}=\left\{(7n+i)-7\left[\frac{7n+i}{7}\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$$

כאשר $0\le i\le 6$ קבוע .

$$\left[\frac{7n+i}{7}\right]=\left[n+\frac{i}{7}\right]\underset{\frac{i}{7}<1}{\overset{\uparrow}{=}}n$$

$$\Rightarrow\{a_{7n+i}\}_{n=1}^{\infty}=\{7n+i-7n\}_{n=1}^{\infty}=\{i\}_{n=1}^{\infty}$$

מכאן ישנם 7 גבולות חלקיים שונים והגבולות החלקיים השונים הם 0,1,2,3,4,5,6 בהתאם לערך של i .

אלה הם גבולות חלקיים יחידים, כי

1. אם נוסיף לסדרה מהסוג $\{a_{7n+i}\}_{n=1}^{\infty}$ מספר סופי של איברים מתת סדרה אחרת הגבול של $\{a_{7n+i}\}_{n=1}^{\infty}$ יישאר i .

2. אם נוסיף לסדרה מהסוג $\{a_{7n+i}\}_{n=1}^{\infty}$ אינסוף איברים מסוג אחר נקבל תת סדרה בעלת לפחות שתי תתי סדרה עם גבולות שונים ולכן תת סדרה שנקבל לא תתכנס כלל .

מ-1 ו- 2 נובע שהגבולות החלקיים היחידים הם $0\le i\le 6$, $i\in\mathbb{N}$.

ב. $$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{7^n+(-7)^n}{5^n}\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

פתרון :

נגדיר :

$$\{c_n\}=\left\{\cos\frac{\pi n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}\ ,\ \{b_n\}=\frac{7^n+(-7)^n}{5^n}$$

$$a_n=b_nc_n\ \forall n\ge 1$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{2n+1}+(-7)^{2n+1}}{5^{2n+1}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 7^{2n}}{5^{2n}} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_{4n} = \lim_{n\to\infty} \cos 2\pi n = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} c_{4n+2} = \lim_{n\to\infty} \cos(2\pi n+\pi) = -1$$

ומכאן נקבל שהגבולות החלקיים של הסדרה $\{a_n\}_{n=-1}^{\infty}$ הם :

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} b_{2n+1}c_{2n+1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{4n} = \lim_{n\to\infty} b_{4n}c_{4n} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{4n+2} = \lim_{n\to\infty} b_{4n+2}c_{4n+2} = -\infty$$

ואלה הם גבולות חלקיים יחידים . הוכחה ליחידות הגבולות דומה לסעיף א'.

ג. $$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{\sqrt{\sqrt{n}+2\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[4]{2n+\sqrt{3n}}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

פתרון :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{n}+2\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[4]{2n+\sqrt{3n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+2n^{-\frac{1}{6}}}}{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}n^{-\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

זהו גבול חלקי יחיד , כי הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת ולכן כל תת סדרה שלה מתכנסת לאותו גבול .

2. הוכיחו כי $\overline{\lim}(-a_n) = -\underline{\lim}\, a_n$.

פתרון :

קיימת תת סדרה $\{-a_{n_k}\}$ של $\{-a_n\}$ כך ש $\lim_{k\to\infty}(-a_{n_k}) = \overline{\lim_{n\to\infty}}(-a_n)$

$$\Rightarrow -\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \overline{\lim}(-a_n)$$

וכן לכל תת סדרה $\{-a_{n_l}\}$ של $\{-a_n\}$ מתקיים $\lim_{l\to\infty}(-a_{n_l}) \le \lim_{k\to\infty}(-a_{n_k}) = \overline{\lim}(-a_n)$

$$\Rightarrow -\lim_{l\to\infty}(a_{n_l}) \le -\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \overline{\lim}(-a_n)$$

ולכן

$\lim_{l\to\infty}(a_{n_l}) \ge \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -\overline{\lim}(-a_n)$ לכל תת סדרה $\{a_{n_l}\}$ של $\{a_n\}$.

אם כן , קיבלנו ש-

$$\underline{\lim}a_n = -\overline{\lim}\left(-a_n\right)$$
$$\Leftrightarrow -\underline{\lim}a_n = \overline{\lim}\left(-a_n\right)$$

3. הוכיחו או הפריכו:

א. אם לכל n , $a_n > 0$ ומתקיים $\overline{\lim}\, a_n \cdot \overline{\lim}\, \frac{1}{a_n} = 1$, אזי הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ קיים.

פתרון :

מהנתון נקבל ש $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n}$ והם סופיים. נראה כי מנתוני השאלה גם נובע כי:

(*) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{1}{a_n} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{1}{a_n}$ ולכן נסיק כי $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ ומכאן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ קיים .

נוכיח כעת את (*) : תחילה נראה כי $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{1}{a_n} \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{1}{a_n}$. קיימת תת סדרה $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ של $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{a_{n_k}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{1}{a_n}$ נקבל מכיוון שאיברי $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ חיוביים ש $0 \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \le \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$ אבל $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \ne 0$ (

אחרת לא נקבל $\overline{\lim}\, a_n \cdot \overline{\lim}\, \frac{1}{a_n} = 1$ בסתירה לנתון) ומכאן

$$0 < \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \le \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \Rightarrow \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n} \ge \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{a_{n_k}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{1}{a_n}$$

שנית נוכיח ש $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{1}{a_n} \ge \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n}$ אומנם , קיימת תת סדרה $\left\{a_{n_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ שעבורה מתקיים $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{l\to\infty} a_{n_l}$

ומתקיים $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{1}{a_n} \ge \lim\limits_{l\to\infty} \frac{1}{a_{n_l}} = \frac{1}{\lim\limits_{l\to\infty} a_{n_l}} = \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n}$. בסה"כ נסיק $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n}$ ונקבל הדרוש .

ב. $\overline{\lim}\left(a_n - b_n\right) = \overline{\lim}\, a_n - \overline{\lim}\, b_n$

פתרון :

הטענה לא נכונה .

דוגמא נגדית :

נגדיר סדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 2k-1 \quad k \in \mathbb{N} \\ 0 & n = 2k \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

וסדרה $\left\{b_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י

$$b_n = \begin{cases} 1 & n = 2k-1 \quad k \in \mathbb{N} \\ 2 & n = 2k \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

במקרה זה

$$a_n - b_n = \begin{cases} 0 & n = 2k-1 \quad k \in \mathbb{N} \\ -2 & n = 2k \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ולכן $\overline{\lim}\left(a_n-b_n\right)=0$, אבל $\overline{\lim}a_n=1, \overline{\lim}b_n=2$,

ולכן $\overline{\lim}a_n-\overline{\lim}b_n=1-2=-1\neq 0$.

ג. $\underline{\lim}\left(a_nb_n\right)=\underline{\lim}\,a_n\cdot\underline{\lim}\,b_n$

פתרון :

הטענה לא נכונה

דוגמא נגדית :

נגדיר סדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י

$$a_n=\begin{cases}1 & n=2k-1 \quad k\in\mathbb{N}\\ -1 & n=2k \quad k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

וסדרה $\left\{b_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י

$$b_n=\begin{cases}0 & n=2k-1 \quad k\in\mathbb{N}\\ -2 & n=2k \quad k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

במקרה זה

$\underline{\lim}a_n\cdot\underline{\lim}b_n=-1\cdot\left(-2\right)=2$, אבל

$$a_nb_n=\begin{cases}0 & n=2k-1 \quad k\in\mathbb{N}\\ 2 & n=2k \quad k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

ולכן $\underline{\lim}\left(a_nb_n\right)=0\neq 2$