

## תרגיל מספר 10 במבנים אלגבריים

- תאריכי הגשה: הקבוצה של יום שלישי – 18/1. יום רביעי – 19/1. יום חמישי – 20/1
- נא לכתוב על התרגילים שם, ת.ז. ומספר קבוצת תרגול.
- ההגשה היא רק לקבוצות שאתם רשומים אליהן! תרגילים שיוגשו לקבוצות אחרות לא יבדקו.

### שאלה 1

הוכיחו או הפריכו:

- א. יהיו  $A, B$  אידיאלים בחוג  $R$  אזי  $A \cup B$  הוא אידיאל ב  $R$ .
- ב. אם  $S$  תת חוג של  $R$  ו  $a \in S$  הפיך ב  $R$  אז  $a$  הפיך ב  $S$ .
- ג. אם  $\varphi: A \rightarrow B$  הומומורפיזם של חוגים  $A$ -ו  $B$  שדה אזי  $\varphi$  חח"ע.
- ד. יהיו  $A$  ו  $B$  אידיאלים בחוג  $R$  כך ש  $A \cap B$  הוא אידיאל ראשוני אזי  $A \cap B = A$  או  $A \cap B = B$ .

### שאלה 2

יהי  $\varphi: R \rightarrow A$  הומומורפיזם של חוגים הראו שאם  $P$  אידיאל ראשוני של  $A$  אזי  $\varphi^{-1}(P)$  הוא אידיאל ראשוני ב  $R$ . האם אותו דבר מתקיים עבור אידיאלים מקסימליים? דהיינו, האם  $P$  אידיאל מקסימלי של  $A$  אזי  $\varphi^{-1}(P)$  הוא אידיאל מקסימלי של  $R$ .

### שאלה 3

מצאו את כל האידיאלים של  $\mathbb{Z}_{49}$  ושל  $\mathbb{Z}_{42}$ . ציינו מהם האידיאלים המקסימליים.

### שאלה 4

יהי  $\mathbb{Q}$  שדה המספרים הרציונליים. נסמן  $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$ . בנו איזומורפיזם מפורש מחוג המנה  $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1)$  ל-  $\mathbb{Q}[i]$  והוכיחו שזהו איזומורפיזם.

### שאלה 5

יהי  $N: \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  זהו כידוע חוג. התבוננו בהעתקה  $N: \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$   $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$ .  $\{0\}$  המוגדרת ע"י  $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$ .

א. הוכיחו כי  $N(ab) = N(a)N(b)$ . הראו כי  $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  הפיך אם ורק אם  $N(x) = 1$ .

הסיקו מהם האיברים ההפיכים ב  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ .

ב. השתמשו ב  $N$  עמ"נ להוכיח כי 7 הוא אי פריק ב  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  אך איננו ראשוני.

ג. האם  $4 + \sqrt{-5}$  אי פריק ב  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ .

### שאלה 6

הוכיחו כי בחוג אוקלידי  $X$  לכל  $x \in X$  וש-  $d(1) = d(x)$  אם ורק אם  $x$  הפיך.

### שאלה 7 :

(1) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. הפולינום  $x^4+1$  פריק מעל  $\mathbb{Z}_5$ .

ב. ל-14 קיים פירוק יחיד ב-  $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ .

ג. יהי  $\mathbb{F}_9$  השדה עם 9 איברים. מתקיים  $(\mathbb{F}_9 \setminus \{0\}, \cdot) \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ .

ד.  $\mathbb{Z}_{25}$  ו-  $\mathbb{F}_{25}$  חוגים איזומורפים.

(2) בנו שדה  $F$  מסדר 27 כחוג מנה.

(3) הראו כי  $x^2-2$  אי-פריק מעל  $\mathbb{Z}_5$ .

(4) הוכיחו כי בשדה  $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2-2 \rangle$  קיים פתרון למשוואה  $a^2+a+1=0$