

כל הזכויות שמורות
אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
זהבית צבי ©

פתרון תרגיל בית 6, גאומטריה אנליטית, זהבית צבי

סווגו את התבניות הבאות:

1. $x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 0$
2. $52x^2 + 73y^2 + 72xy + 120x + 160y + 75 = 0$
3. $5x^2 + 8xy + 5y^2 + x + 3y = 0$
4. $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 5x - 15y - 8 = 0$

פתרון

1. שלב א': המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים

$a_{12} = a_{21} = -1$ מייצגים מקדמים של $xy = yx$ בהתאמה. התבנית נכתבת כך:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{x'} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + (1 \ 1) \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x = 0 \quad (*)$$

המטריצה אינה אלכסונית, לכן נבצע עבודה לכסון אורתוגונלי.

שלב ב': נמצא את הערכים העצמים ע"י פתרון המשוואה: $|A - \lambda I| = 0$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$$

ולפי מה שלמדנו $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ ו- $\lambda_1 = 0 \neq \lambda_2 = 2$, לכן זו פרבולה.

נמצא את הווקטורים העצמים ע"י פתרון המערכת: $(A - \lambda I)v = 0$ לכל ע"ע שמצאנו.

עבור $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

נבחר שרירותית $y = 1$ ונקבל מיד $x = 1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{נרמל: } \|v_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

עבור $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad -x - y = 0 \Rightarrow x = -y$$

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

נבחר שרירותית $y = -1$ ונקבל מיד $x = 1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ננרמל: $\|v_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ והווקטור המנורמל: $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

שלב ג': המטריצה המלכסנת היא: $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא: $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

שלב ד': נציב $(x \ y) = (x' \ y')P^t \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \end{bmatrix}^t$

במשוואה (*) ונקבל:

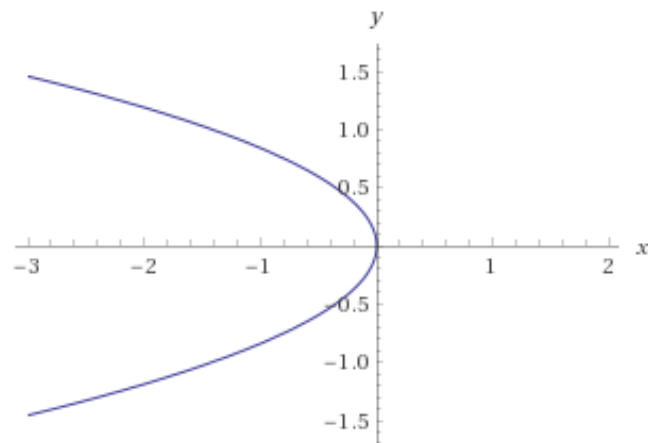
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{x'} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + (1 \ 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (1 \ 1) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{P^t} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2y'^2 + \sqrt{2}x' = 0 \quad (:2) \Rightarrow y'^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x'$$

איור לפי הצירים x' ו- y' :

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©



מכוון ש- $|P| = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$ מדובר בפרבולה משוקפת.

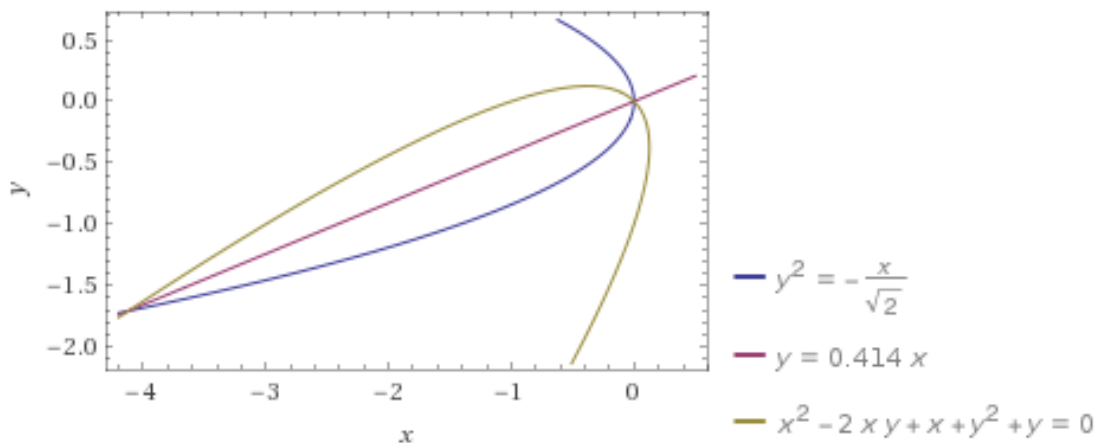
מטריצת שיקוף כללית היא $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

נציב $\theta = 45^\circ$ ונקבל את $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, לכן ציר השיקוף הוא הישר $y = mx$ כאשר

$$m = \tan \frac{\theta}{2} = \tan \frac{45^\circ}{2} = 0.414$$

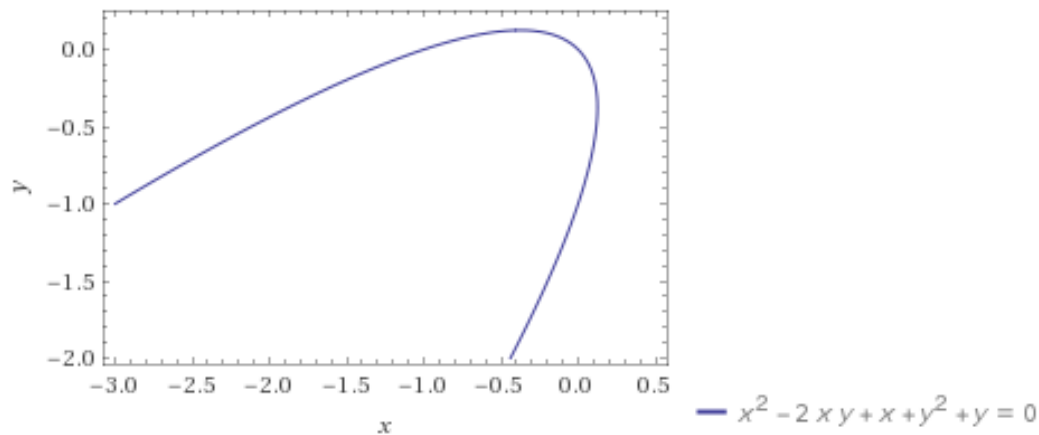
כלומר $y = 0.414x$.

האיור הבא משלב את הפרבולה לפי הצירים x' ו- y' , את ציר השיקוף ואת הצורה המקורית במערכת צירים x, y :



כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

הצורה המקורית לפי הצירים x ו- y :



2. שלב א': המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A = \begin{pmatrix} 52 & 36 \\ 36 & 73 \end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים

$a_{12} = a_{21} = 36$ מייצגים מקדמים של $xy = yx$ בהתאמה. התבנית נכתבת כך:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{x'} \underbrace{\begin{pmatrix} 52 & 36 \\ 36 & 73 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + (120 \ 160) \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + 75 = 0 \quad (*)$$

המטריצה אינה אלכסונית, לכן נבצע עבודה לכסוף אורתוגונלי.

שלב ב': נמצא את הערכים העצמים ע"י פתרון המשוואה: $|A - \lambda I| = 0$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 52 - \lambda & 36 \\ 36 & 73 - \lambda \end{vmatrix} = (52 - \lambda)(73 - \lambda) - 1296 = 3796 - 52\lambda - 73\lambda + \lambda^2 - 1296 = \lambda^2 - 125\lambda + 2500 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 100, \lambda_2 = 25$$

ולפי מה שלמדנו $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ו- $\lambda_1 \neq \lambda_2$, לכן זו אליפסה. הו"ע המתאימים יהיו מלכתחילה אורתוגונליים לפי משפט.

נמצא את הווקטורים העצמים ע"י פתרון המערכת: $(A - \lambda I)v = 0$ לכל ע"ע שמצאנו.

עבור $\lambda_1 = 100$:

$$\begin{pmatrix} -48 & 36 \\ 36 & -27 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{9}R_2 \rightarrow R_2]{\frac{1}{12}R_1 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 4x - 3y = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}y$$

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

נבחר שרירותית $y = 4$ ונקבל מיד $x = 3$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

ננרמל: $\|v_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ והוקטור המנורמל: $u_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

עבור $\lambda_2 = 25$:

$$\begin{pmatrix} 27 & 36 \\ 36 & 48 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{9}R_1 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 3x + 4y = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}y$$

נבחר שרירותית $y = 3$ ונקבל מיד $x = -4$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

ננרמל: $\|v_2\| = \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$

$$u_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

שלב ג': המטריצה המלכסנת היא $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא

$$D = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

שלב ד': נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \left[P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right]' \Rightarrow (x \ y) = (x' \ y') P'$

במשוואה (*) ונקבל:

$$\underbrace{(x \ y)}_{x^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 52 & 36 \\ 36 & 73 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + (120 \ 60) \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + 75 = 0 \Rightarrow$$

$$(x' \ y') \underbrace{\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}}_{D=P^t A P} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (120 \ 60) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}_{(200 \ 0)} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 75 = 0 \Rightarrow$$

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

$$100x'^2 + 25y'^2 + 200x' = -75$$

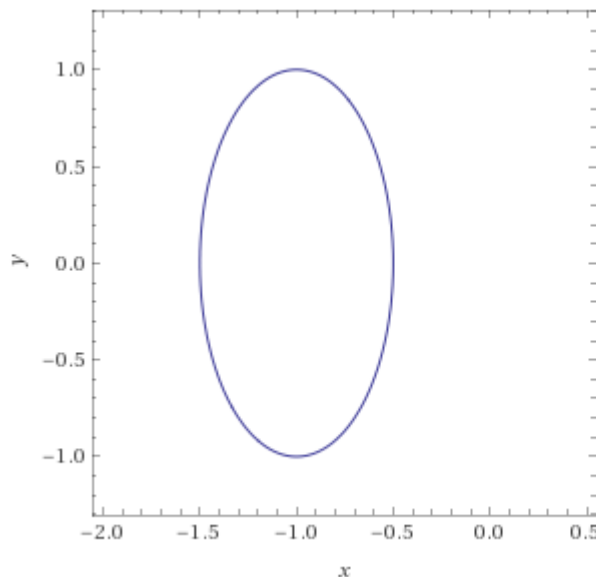
כעת נבצע השלמה לריבוע:

$$100x'^2 + 25y'^2 + 200x' = -75 \Rightarrow \left\{ \underbrace{\left(\underset{u}{10x'} \right)^2 + 2 \cdot \underset{u}{10x'} \cdot \underset{v}{10} + \underset{v}{10}^2}_{(u+v)^2} \right\} - 10^2 + 25y'^2 = -75 \Rightarrow$$

$$(10x'+10)^2 + 25y'^2 = -75 + 100 = 25 \Rightarrow (10(x'+1))^2 + 25y'^2 = 25 \Rightarrow 100(x'+1)^2 + 25y'^2 = 25 \quad (:25)$$

$$\Rightarrow \frac{(x'+1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y'^2}{1} = 1$$

איור לפי הצירים x' ו- y' :



$$- 25(4(x+1)^2 + y^2) = 25$$

מכוון ש- $|P| = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$ מדובר באליפסה מסובבת.

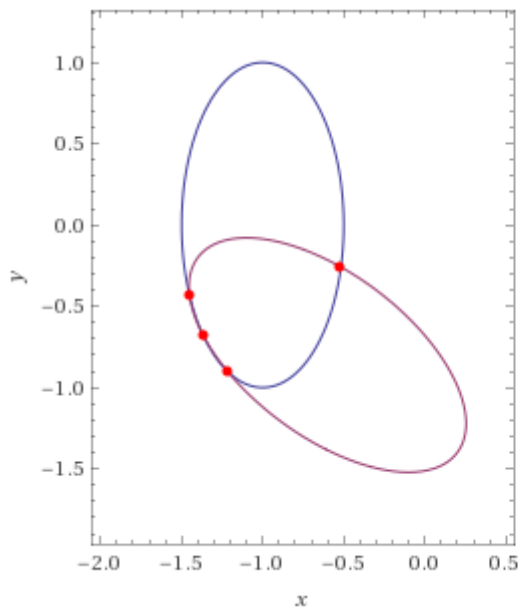
מטריצת סיבוב כללית היא $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

המטריצה $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ ולכן זווית הסיבוב היא:

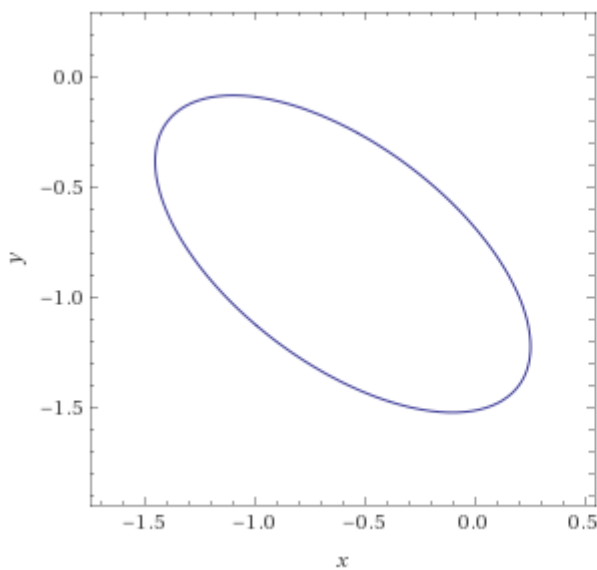
$$\theta = \arccos \frac{3}{5} = 53.13^\circ$$

האיור הבא משלב את האליפסה לפי הצירים x' ו- y' ואת הצורה המקורית במערכת צירים x, y :



— $25(4(x+1)^2 + y^2) = 25$
 — $52x^2 + 24x(3y+5) + y(73y+160) = -75$

הצורה המקורית לפי הצירים x ו- y :



— $52x^2 + 24x(3y+5) + y(73y+160) = -75$

כל הזכויות שמורות
אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
זהבית צבי ©

3. שלב א': המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים

$a_{12} = a_{21} = 4$ מייצגים מקדמים של $xy = yx$ בהתאמה.

$$(x \ y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1 \ 3) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (*)$$

המשוואה הנתונה נכתבת כך:

שלב ב': נמצא את הערכים העצמים ע"י פתרון המשוואה: $|A - \lambda I| = 0$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 16 = 25 - 10\lambda + \lambda^2 - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1$$

ולפי מה שלמדנו $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ו- $\lambda_1 \neq \lambda_2$, לכן זו אליפסה.

נמצא את הווקטורים העצמים ע"י פתרון המערכת: $(A - \lambda I)v = 0$ לכל ע"ע שמצאנו.

עבור $\lambda_1 = 9$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \quad 4x - 4y = 0 \Rightarrow x = y$$

נבחר שרירותית $y = 1$ ונקבל מיד $x = 1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{ננרמל: } \|v_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

עבור $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 4x + 4y = 0 \Rightarrow x = -y$$

נבחר שרירותית $y = -1$ ונקבל מיד $x = 1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{ננרמל: } \|v_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

שלב ג': המטריצה המלכסנת היא: $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא: $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

שלב ד': נציב $(x \ y) = (x' \ y') P^t \Rightarrow (x \ y) = (x' \ y') \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^t \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ בתבנית ריבועית ונקבל:

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

$$(x' \ y') \begin{matrix} P^t A P \\ D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} & -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \end{pmatrix}}_P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 9x'^2 + y'^2 + 2\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' = 0$$

כעת נעשה השלמות לריבוע בכדי להכניס מחוברים ממעלה ראשונה לתוך סכום (או הפרש) ריבועים בעזרת נוסחאות הכפל המקוצר $(u \pm v)^2 = u^2 \pm 2uv + v^2$:

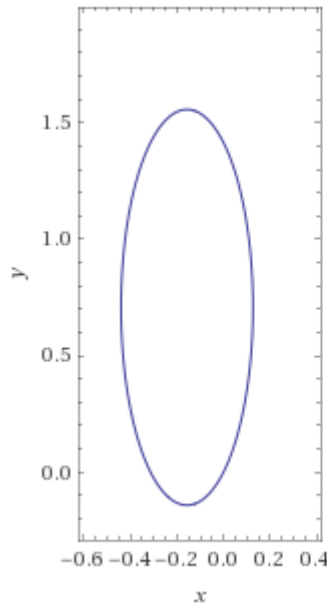
$$\left\{ \begin{matrix} (3x')^2 + 2(3x') \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \\ u \qquad \qquad \qquad v \qquad \qquad \qquad \frac{2}{9} \end{matrix} \right\} - \frac{2}{9} + \left\{ \begin{matrix} (y')^2 - 2 \cdot y' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ u \qquad \qquad \qquad v \qquad \qquad \qquad \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(3x' + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(y' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{2} = \frac{13}{18} \Rightarrow \left(3\left(x' + \frac{\sqrt{2}}{9}\right)\right)^2 + \left(y' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{13}{18} \Rightarrow$$

$$9\left(x' + \frac{\sqrt{2}}{9}\right)^2 + \left(y' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{13}{18} \left(\frac{13}{18}\right) \Rightarrow \frac{\left(x' + \frac{\sqrt{2}}{9}\right)^2}{\frac{13}{162}} + \frac{\left(y' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{13}{18}} = 1$$

זו אליפסה.
איור לפי הצירים x' ו- y' :

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©



$$-\frac{1}{9}(9x + \sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - y\right)^2 = \frac{13}{18}$$

מכוון ש- $|P| = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$ מדובר באליפסה משוקפת.

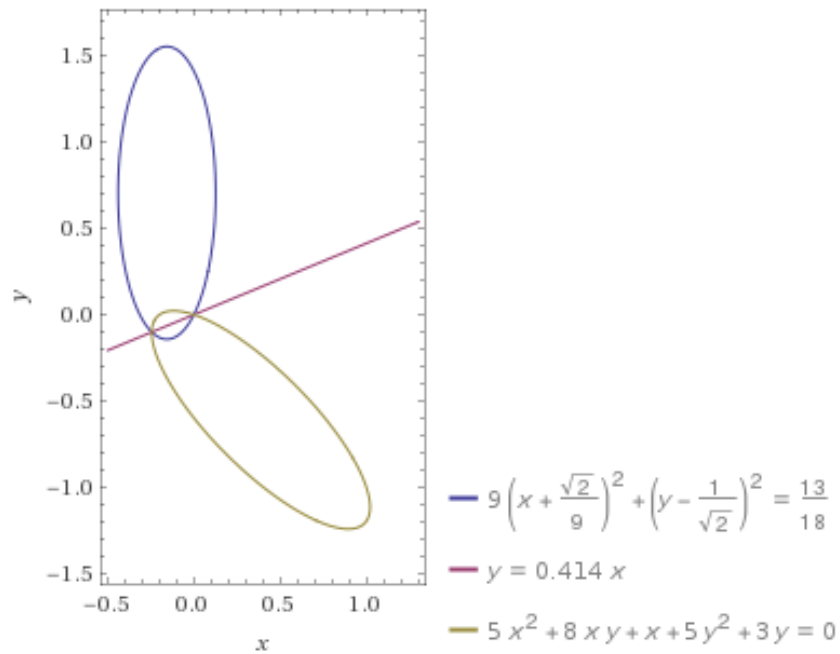
מטריצת שיקוף כללית היא $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

נציב $\theta = 45^\circ$ ונקבל את $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, לכן ציר השיקוף הוא הישר $y = mx$ כאשר

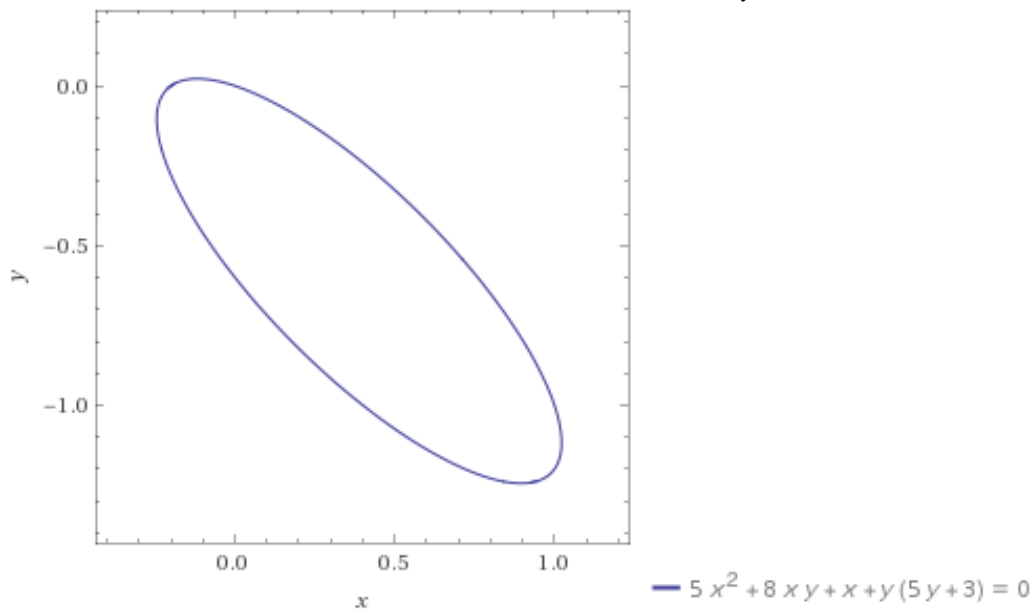
$$m = \tan \frac{\theta}{2} = \tan \frac{45^\circ}{2} = 0.414 \text{ כלומר } y = 0.414x$$

האיור הבא משלב את האליפסה לפי הצירים x' ו- y' , את ציר השיקוף ואת הצורה המקורית במערכת צירים x, y :

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©



הצורה המקורית לפי הצירים x ו- y :



4. שלב א': המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים

$a_{12} = a_{21} = 12$ מייצגים מקדמים של $xy = yx$ בהתאמה.
 התבנית נכתבת כך :

כל הזכויות שמורות
אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
זהבית צבי ©

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{x'} \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + (5 \quad -15) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 8 = 0 \quad (*)$$

המטריצה אינה אלכסונית, לכן נבצע עבודה לכסון אורתוגונלי.

שלב ב': נמצא את הערכים העצמים ע"י פתרון המשוואה: $|A - \lambda I| = 0$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 9 - \lambda & 12 \\ 12 & 16 - \lambda \end{vmatrix} = (9 - \lambda)(16 - \lambda) - 144 = 144 - 9\lambda - 16\lambda + \lambda^2 - 144 = \lambda^2 - 25\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 25$$

ולפי מה שלמדנו $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ ו- $\lambda_1 = 0 \neq \lambda_2 = 25$, לכן זו פרבולה.

נמצא את הווקטורים העצמים ע"י פתרון המערכת: $(A - \lambda I)v = 0$ לכל ע"ע שמצאנו.

עבור $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}R_2 \rightarrow R_2]{\frac{1}{3}R_1 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 3x + 4y = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}y$$

נבחר שרירותית $y = -3$ ונקבל מיד $x = 4$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$u_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} : \text{ננרמל: } \|v_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

עבור $\lambda_2 = 25$:

$$\begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2]{-\frac{1}{4}R_1 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 4x - 3y = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}y$$

נבחר שרירותית $y = 4$ ונקבל מיד $x = 3$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$u_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} : \text{ננרמל: } \|v_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

שלב ג': המטריצה המלכסנת היא: $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא: $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t = \left[P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right]^t \Rightarrow (x \quad y) = (x' \quad y') P^t$$

במשוואה (*) ונקבל:

כל הזכויות שמורות
אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
זהבית צבי ©

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{x'} \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + (5 \quad -15) \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}}_{D=P'AP} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}}_{D=P'AP} \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{P} + (5 \quad -15) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}}_P \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{P} - 8 = 0 \Rightarrow$$

(13 -9)

$$25y'^2 + 13x' - 9y' - 8 = 0$$

נבצע השלמה לריבוע:

זו פרבולה שוכבת.

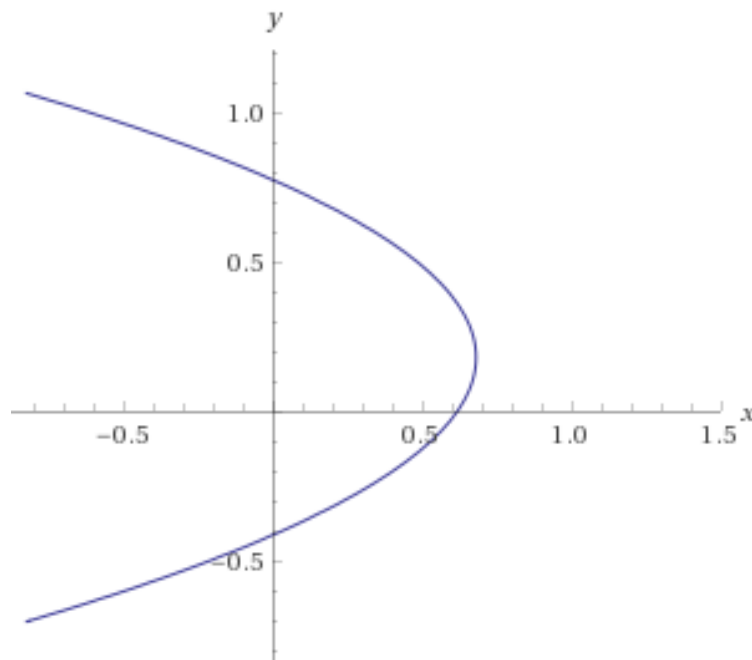
$$25y'^2 + 13x' - 9y' - 8 = 0 \Rightarrow \left\{ \left(\begin{matrix} 5y' \\ u \end{matrix} \right)^2 - 2 \cdot 5y' \cdot \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10} \right)^2 \right\} + 13x' - 8 - \left(\frac{9}{10} \right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(5y' - \frac{9}{10} \right)^2 + 13x' - \frac{881}{100} = 0 \Rightarrow \left(5 \left(y' - \frac{9}{50} \right) \right)^2 + 13x' - \frac{881}{100} = 0 \Rightarrow 25 \left(y' - \frac{9}{50} \right)^2 + 13x' - \frac{881}{100} = 0 \quad (:25) \Rightarrow$$

$$\left(y' - \frac{9}{50} \right)^2 + \frac{13}{25}x' - \frac{881}{2500} = 0 \Rightarrow \left(y' - \frac{9}{50} \right)^2 = \frac{881}{2500} - \frac{13}{25}x'$$

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

איור לפי הצירים x' ו- y' :



מכוון ש- $|P| = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$ מדובר בפרבולה מסובבת.

מטריצת סיבוב כללית היא $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

המטריצה $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ ולכן זווית הסיבוב היא

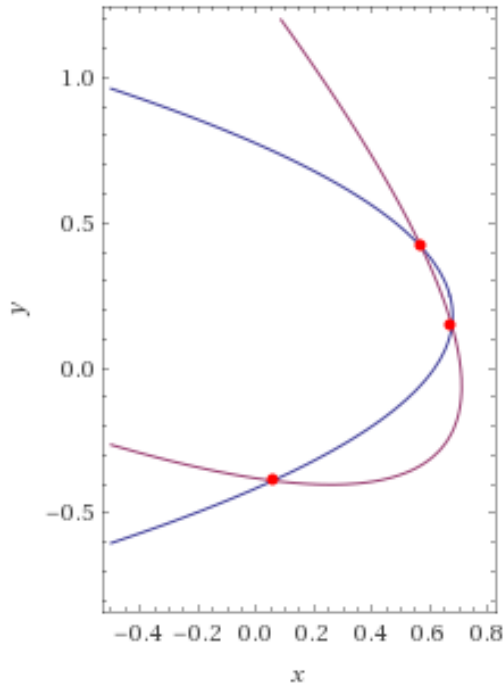
עם כיוון השעון כי הזווית במינוס. $\theta = -\arccos \frac{4}{5} = -36.87^\circ$

תציבו את הזווית ותראו שהיא חיבת להיות במינוס ולא בפלוס בשביל לשמור על הסימנים הנכונים של ערכי

מטריצה $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

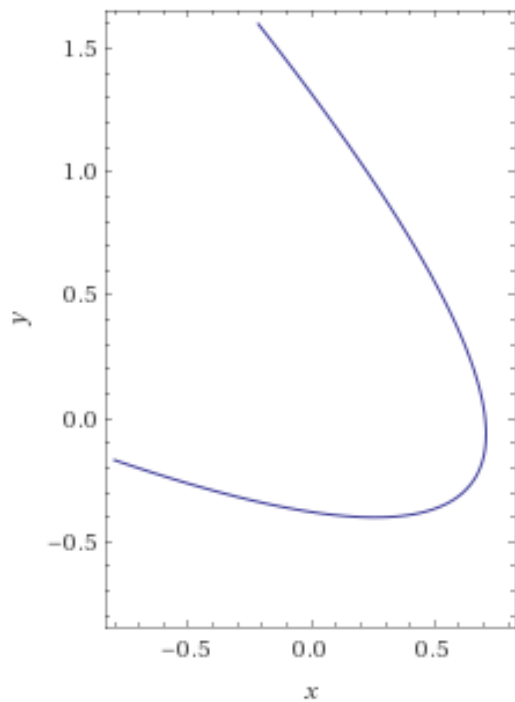
האיור הבא משלב את הפרבולה לפי הצירים x' ו- y' ואת הצורה המקורית במערכת צירים x, y :



$$\text{— } \left(y - \frac{9}{50}\right)^2 = \frac{881}{2500} - \frac{13x}{25}$$

$$\text{— } 9x^2 + 24xy + 5x + 16y^2 - 15y - 8 = 0$$

הצורה המקורית לפי הצירים x ו- y :



$$\text{— } 9x^2 + 24xy + 5x + 16y^2 - 15y - 8 = 0$$