האינדוקציה המתמטית

אקסיומת האינדוקציה המתמטית

טענה המתייחסת למספרים טבעיים נכונה לכל n טבעי, אם היא מקיימת את התכונות הבאות:
1. הטענה נכונה עבור $n=1$ (קיימים מקרים בהם הטענה נכונה, החל ממספר טבעי גדול יותר כלומר: 2, או 3, או 4, ...).
2. מההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ (k - מספר טבעי כלשהו), נובע שהיא נכונה גם עבור המספר הטבעי העוקב $n=k+1$.

דוגמה: הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי מתקיים:

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$

פתרון:

בתרגיל הנ"ל צריך להוכיח שוויון של שני אגפים. נבחר לפתח את האגף שעליו הכי נוח לבצע פעולות אלגבריות, עד שנוכיח שהוא שווה לאגף השני. נוכיח (בלי הגבלת הכלליות) שהאגף השמאלי שווה לאגף הימני. נסמן את האגף השמאלי ב- L_n (Left) ואת האגף הימני ב- R_n (Right), כלומר:

$$L_n=1+3+5+...+(2n-1) \quad , \qquad R_n=n^2$$

<u>שלב א'</u> **בדיקת האינדוקציה:** נבדוק האם עבור $n=1$, מתקיים $L_1=R_1$. בתרגיל זה, L_n הוא סכום n האיברים הראשונים בסדרה. לכן, כדי למצוא את L_1, נציב $n=1$ באיבר האחרון שבאגף שמאל:

$$n=1: \quad 2\cdot1-1=1 \quad \Rightarrow \quad L_1=1$$

שים לב, הצבנו את $n=1$ באיבר האחרון של L_n וקיבלנו את האיבר הראשון.

נציב $n=1$ באגף הימני של השוויון, כדי למצוא את R_1: $\qquad R_1=1^2=1$

קיבלנו כי $L_1=R_1$. זאת אומרת, הטענה נכונה עבור $n=1$.

הערה: *אם יש צורך לבצע את הבדיקה גם עבור $n>1$, מציבים $n=2$, $n=3$ וכו', באיבר האחרון שבאגף שמאל ובאגף ימין.*

$$n=2:\quad \begin{cases} 2\cdot 2-1=3 \quad \Rightarrow \quad L_2=1+3=4 \\ \qquad\qquad\qquad\quad R_2=2^2=4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad L_2=R_2$$

באופן דומה:

$$n=3:\quad \begin{cases} 2\cdot 3-1=5 \quad \Rightarrow \quad L_3=1+3+5=9 \\ \qquad\qquad\qquad\quad R_3=3^2=9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad L_3=R_3$$

<u>שלב ב'</u> **הנחת האינדוקציה:** נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ (k - מספר טבעי),
כלומר $L_k=R_k$. הנחה זו נרשמת על-ידי הצבת k במקום n בטענה.

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}_{L_k}=\underbrace{k^2}_{R_k}$$

<u>שלב עזר:</u> באגף שמאל ובאגף ימין נציב $k+1$ *במקום* n *ונקבל:*

$$L_{k+1}=1+3+5+\ldots+(2k-1)+\left[2(k+1)-1\right]=1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)$$

$$R_{k+1}=(k+1)^2$$

<u>שלב ג'</u> **הוכחת האינדוקציה:** על סמך הנחת האינדוקציה, נוכיח כי עבור $n=k+1$ מתקיים
$L_{k+1}=R_{k+1}$.

נביע את L_{k+1} באמצעות L_k:

$$L_{k+1}=\underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}_{L_k}+(2k+1)=L_k+(2k+1)$$

בשלב ב' הנחנו כי $L_k=R_k$, לכן נוכל לרשום:

$$L_{k+1}=R_k+(2k+1)$$

ידוע כי $R_k=k^2$, לפיכך נקבל:

$$L_{k+1}=k^2+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

כאמור לעיל, $R_{k+1}=(k+1)^2$. המסקנה העולה היא: $L_{k+1}=R_{k+1}$.

הערה: *תלמיד המתקשה בפירוק לגורמים, יכול לפתח את שני האגפים (כל אחד לחוד) ולהראות שכל איבר המופיע באגף שמאל נמצא גם באגף ימין ולהיפך.*

<u>לסיכום:</u> בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$ $(L_1=R_1)$. הראינו שנכונות הטענה עבור
$n=k$ טבעי כלשהו $(L_k=R_k)$, גוררת את נכונות הטענה עבור $n=k+1$ $(L_{k+1}=R_{k+1})$.
מכאן שהטענה נכונה לכל n טבעי.

© כל הזכויות שמורות – אלכס זיו מתמטיקה המדריך המלא האינדוקציה המתמטית

שאלה 1

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\frac{9}{5^2\cdot 6^2}+\ldots+\frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+2)^2}$$

שאלה 2

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{3}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{4}{5\cdot 6\cdot 7}+\ldots+\frac{n+1}{(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{(n+1)(n+2)}{4(n+3)(n+4)}-\frac{1}{24}$$

שאלה 3

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{4}{3}+\frac{28}{3^2}+\frac{244}{3^3}+\ldots+\frac{3^{2n-1}+1}{3^n}=\frac{3^{2n}-1}{2\cdot 3^n}$$

שאלה 4

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{4}{2\cdot 3\cdot 2^2}+\frac{5}{3\cdot 4\cdot 2^3}+\frac{6}{4\cdot 5\cdot 2^4}+\ldots+\frac{n+3}{(n+1)(n+2)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+2)\cdot 2^{n+1}}$$

שאלה 5

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{4\cdot 2!}+\frac{1}{5\cdot 3!}+\frac{1}{6\cdot 4!}+\ldots+\frac{1}{(n+3)\cdot(n+1)!}=\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+3)!}$$

שאלה 6

(i) הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n+2}=\frac{2}{n+2}$$

(ii) היעזר בסעיף (i) ומצא את המכפלה: $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{47}{48}$

שאלה 7

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{3}{20}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n(n+1)}=\frac{2}{n\cdot(n+1)!}\qquad (n\geq 2)$$

שאלה 8

(i) הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי מתקיים:

$$3-13+23-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot(10n-7)=(-1)^{n+1}\cdot(5n-1)-1$$

(ii) היעזר בסעיף הקודם ומצא את הסכום: $-53+63-73+\ldots+223$

שאלה 9

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{-5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-\frac{9}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{(-1)^n(2n+3)}{(n+1)(n+2)}=\frac{(-1)^n}{n+2}-\frac{1}{2}$$

שאלה 10

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי מתקיים:

$$-2+1+4+7+10+\ldots+(6n-5)=n(6n-7)$$

שאלה 11

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי מתקיים:

$$-9+(-5)+(-1)+3+7+11+\ldots+(12n-13)=3n\cdot(6n-11)$$

שאלה 12

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי מתקיים:

$$(n+4)+(n+5)+(n+6)+\ldots+(2n+2)+(2n+3)=\frac{n}{2}(3n+7)$$

שאלה 13

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי מתקיים:

$$3^n+3^{n+1}+3^{n+2}+\ldots+3^{2n+1}=\frac{1}{2}\left(3^{2n+2}-3^n\right)$$

שאלה 14

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי, הביטוי $2n^3+3n^2+7n$ מתחלק ב- 6 ללא שארית.

שאלה 15

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי <u>אי-זוגי</u>, הביטוי $2^{3n+1}+2\cdot 6^{n}$ מתחלק ב- 28 ללא שארית.

שאלה 16

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי, הביטוי $2\cdot 5^{n}+2^{n+2}-18$ מתחלק ב- 24 ללא שארית.

שאלה 17

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי מתקיים אי-השוויון:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}>\frac{9n-1}{10(n+1)}$$

שאלה 18

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי, החל מ- 3 $(n\geq 3)$, מתקיים

אי-השוויון: $2^{n}+3^{n}+4^{n}<5^{n}$

שאלה 19

נתון אי-השוויון $3^{n-1}>n^{3}-n$.

מצא החל מאיזה n טבעי, מתקיים אי-השוויון הנתון והוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, כי אי-השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי, החל מאותו n שמצאת.

שאלה 20

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי מתקיים אי-השוויון:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2n\cdot(2n+1)}<\frac{11n}{5(2n+1)}$$

שאלה 21

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל n טבעי מתקיים אי-השוויון:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}$$

© כל הזכויות שמורות – אלכס זיו מתמטיקה המדריך המלא האינדוקציה המתמטית