אלגברה לינארית 1 112-88
מבחן מועד א' סמסטר קיץ תשע"ג

משך המבחן: שלוש שעות. אין להשתמש בחומר עזר.

חלק א - ענו על שתיים משלוש השאלות הבאות (סה"כ 40 נקודות):

1. הוכיחו כי לכל שני תת-מרחבים וקטורים, $U, W \subseteq V$ מתקיים $\dim(U+W) =$ $\dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

תשובה: הוכח בכתה.

2. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית. הוכיחו:

א. לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $im(T^{k+1})$ תת מרחב וקטורי של $im(T^k)$.

תשובה: $T^{k+1} : V \to V$ העתקה לינארית, לכן $im(T^{k+1})$ מרחב וקטורי. נותר להראות כי $im(T^{k+1}) \subseteq im(T^k)$. אבל,

$$\begin{aligned} im(T^{k+1}) &= \left\{T^{k+1}v | v \in V\right\} \\ &= \left\{T^k T v | v \in V\right\} \\ &= \left\{T^k w | w = Tv, v \in V\right\} \\ &= \left\{T^k w | w \in im(T)\right\} \\ &\subseteq \left\{T^k w | w \in V\right\} = im(T^k) \end{aligned}$$

ב. לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים: אם $\mathrm{im}(T^{k+1}) = \mathrm{im}(T^k)$ אז $\mathrm{im}(T^{k+2}) = \mathrm{im}(T^k)$.

תשובה: בדומה לסעיף הקודם

$$im(T^{k+1}) = \left\{TT^k v | v \in V\right\} = \left\{Tw | w = T^k v, v \in V\right\} = \left\{Tw | w \in im(T^k)\right\}$$

וכן

$$im(T^{k+2}) = \left\{TT^{k+1}v|v \in V\right\} = \left\{Tw|w = T^{k+1}v, v \in V\right\} = \left\{Tw|w \in im(T^{k+1})\right\}$$

אם עבור k מסוים מתקיים $\mathrm{im}(T^{k+1}) = \mathrm{im}(T^k)$ אז:

$$im(T^{k+2}) = \left\{Tw|w \in im(T^{k+1})\right\} = \left\{Tw|w \in im(T^k)\right\} = im(T^{k+1})$$

ג. נסמן $n = \dim(V)$. מתקיים $T^{n+1} = 0 \Leftrightarrow T^n = 0$.

תשובה: הכיוון $(\Rightarrow)$ מיידי: אם $T^n = 0$ אז $T^{n+1} = TT^n = T0 = 0$.
עבור הכיוון $(\Leftarrow)$ נוכיח קודם באינדוקציה: אם $im(T^k) = im(T^{k+1})$ אזי $im(T^k) = im(T^m)$ לכל $m > k$. עבור $m = k+1$ זה מיידי. נניח שזה נכון לכל $k < m \leq p$. אז $im(T^p) = im(T^{p-1}) = im(k)$. אבל לפי הסעיף הקודם (עם $k = p-1$) נובע מכך ש-$im(T^{p+1}) = im(T^{p-1}) = im(T^k)$ והאינדוקציה הושלמה.
עכשיו נוכיח את הטענה. נניח בשלילה ש-$T^{n+1} = 0$ אבל $T^n \neq 0$. אם קיים $1 \leq k < n$ כך שמתקיים $im(T^k) = im(T^{k+1})$ אז לפי האינדוקציה $im(T^n) = im(T^{n+1}) = im(T^k)$, אבל אז לא ייתכן $T^{n+1} = 0$ אבל $T^n \neq 0$. לכן, (ולפי סעיף א) לכל k, $im(T^{k+1}) \subsetneq im(T^k)$. לכן, לכל k, $\dim\left(im(T^{k+1})\right) < \dim\left(im(T^k)\right)$. אבל $\dim\left(im(T)\right) \leq n$. אם $\dim\left(im(T)\right) = n$, T הפיכה ו-$T^{n+1} \neq 0$. אם $\dim\left(im(T)\right) < n$ ולכל k מתקיים $\dim\left(im(T^{k+1})\right) < \dim\left(im(T^k)\right)$ אז $\dim\left(im(T^n)\right) < n-(n-1) = 1$ ולכן $T^n = 0$ בסתירה להנחה.

3. הוכיחו או הפריכו

א. אם $T, S: V \to V$ העתקות לינאריות ומתקיים $TS = ST$ אז לכל $n > 1$ מתקיים $T^nS = ST^n$.

תשובה: הוכחה באינדוקציה. עבור $n = 2$ מתקיים $T^2S = TTS = TST = STT = ST^2$.
נניח נכונות עבור $n = k$: $T^kS = ST^k$.
נקבל: $T^{k+1}S = T^kTS = T^kST = ST^kT = ST^{k+1}$. כאשר השוויון השני משתמש בנתון במשפט והשוויון השלישי בהנחת האינדוקציה (והשתמשנו, כמובן, בקיבוציות).

ב. אם $T: V \to V$ העתקה לינארית ומתקיים $T^2 = I$ אז $T = \pm I$.

תשובה: לא נכון. דוגמה נגדית $[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. מתקיים $[T^2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

חלק ב - ענו על שתיים משלוש השאלות הבאות(סה"כ 40 נקודות):

4. עבור מטריצה כלשהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים $A^{-1} = A^2$. מהם הערכים האפשריים של $\det A$ עבור:

א. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

ב. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

ג. $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_7$

תשובה: אם $A^{-1} = A^2$ אז $AA^{-1} = AA^2 = A^3 = I$ ולכן $\det\left(A^3\right) = \left(\det A\right)^3 = \det I = 1$, ולכן כל מטריצה כזו חייבת לקיים $\left(\det A\right)^3 = 1$.
עבור $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ הפתרון היחיד הוא $\det A = 1$. עבור $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ הפתרונות הם $\det A = 1 (= cis(0)), cis(120°), cis(240°)$. עבור $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_7$ הפתרונות הם $\det A = 1, 2, 4$.

5. יהי $t \in \mathbb{R}$ ותהי $T_t : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ ההעתקה הלינארית התלויה בt המוגדרת ע"י

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b + tc) + (ta + (2t - 1)b + c)\, x + (a + tb + tc)x^2$$

א. יהי $E = \{1, x, x^2\}$ הבסיס הסטנדרטי ל $\mathbb{R}_2[x]$. מצאו מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ כך שמתקיים $\left[T\left(p(x)\right)\right]_E = A\left[p(x)\right]_E$.

ב. עבור אילו ערכי t מתקיים:

1. T_t חד חד ערכית

2. T_t על

3. אם T_t אינה חד חד ערכית מצאו בסיס ל$\ker(T)$ ואת $\dim(\mathrm{im}(T))$.

6. תהי $A = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ כאשר $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ו$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

א. הוכיחו שA היא בסיס ל$\mathbb{R}^3$.

ב. מצאו בסיס $B = \{w_1, w_2, w_3\}$ ל$\mathbb{R}^3$ כך שמתקיים $[I]_B^A = P$.

ג. יהי $v = v_1 + 2v_2 + 3v_3$. מצאו את $[v]_B$.

חלק ג - ענו נכון\לא נכון על ארבע מחמש השאלות הבאות. נמקו את תשובותיכם. (סה"כ 20 נקודות)

7. קיימת מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$ ווקטור $b \in \mathbb{F}^n$ עבור שדה כלשהו $\mathbb{F}$, כך שלמערכת המשוואות $Ax = 0$ יש בדיוק 6 פתרונות.

תשובה: מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית הוא מרחב וקטורי, ולכן מספר הפתרונות הוא חזקה של סדר השדה. כל השדות הסופיים הם מסדר שהוא חזקה של ראשוני בלבד, ולכן גם מספר הפתרונות הוא חזקה של מספר ראשוני. $6 = 2 \times 3$ אינו חזקה של ראשוני ולכן זה לא ייתכן.

8. תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה שכל רכיביה מספרים חיוביים, אז $\det A$ חיובית.

תשובה: לא בהכרח. דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ - $\det A = 1^2 - 2^2 = -3$.

9. אם A מטריצה הפיכה אז גם A^t הפיכה.

תשובה: נכון. אם $B = A^{-1}$ אז $B^tA^t = (AB)^t = I^t = I$ וכן $A^tB^t = (BA)^t = I^t = I$ ולכן $(A^t)^{-1} = B^t = (A^{-1})^t$ ו־A^t הפיכה.

10. לכל שדה $\mathbb{F}$ תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית שהיא גם אנטי סימטרית אז $A = 0$.

תשובה: אם $A^t = A$ וגם $A^t = -A$ אז $A = -A$ או $2A = 0$. זה אומר ש־$A = 0$ אלא אם כן לשדה יש מאפיין 2. לדוגמה המטריצה I בשדה $\mathbb{Z}_2$ היא סימטרית וגם אנטי־סימטרית, ולכן הטענה אינה נכונה.

11. תהינה $A, B, C : V \to V$ העתקות לינאריות. אם $AB = BA$ וגם $AC = CA$ אז מתקיים $BC = CB$.

תשובה: לא נכון. דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$.

בהצלחה!