תזכורת: בשיעור דיברנו על פונקציות

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

הגדרנו פונקציה רציפה.
דיברנו על פונקציות בשני משתנים

$$U(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

ואמרנו שכל פונקציה מרוכבת מתפרקת לשתי פונקציות בשני משתנים. שהם החלק הממשי והחלק המדומה שלה.

$$f(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$$

נגזרות

הגדרה: תהי $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. הנגזרת של f בנקודה z_0, מוגדרת להיות:

$$f'(z_0) = \lim_{z_n \to 0} \frac{f(z_0 + z_n) - f(z_0)}{z_n}$$

נגיד שהפונקציה גזירה בz_0 אם הגבול תמיד קיים, ולא תלוי בסדרה z_n.
באופן כללי, f גזירה אם היא גזירה בכל נקודה.
דוגמאות:

1. פונקציית הזהות. $f(z) = z$.

$$f'(z_0) = \lim_{z_n \to 0} \frac{(z_0 + z_n) - z_0}{z_n} = \lim_{z_n \to 0} 1 = 1$$

2. פונקציה קבועה. $f(z) = c$.

$$f'(z_0) = \lim_{z_n \to 0} \frac{c - c}{z_n} = 0$$

דוגמאות מיוחדות:

1. $f(z) = \bar{z}$.

$$f'(z_0) = \lim_{z_n \to 0} \frac{\overline{z_0 + z_n} - \bar{z_0}}{z_n} = \lim_{z_n \to 0} \frac{\bar{z_0} + \bar{z_n} - \bar{z_0}}{z_n} =$$

$$\lim_{z_n \to 0} \frac{\bar{z_n}}{z_n}$$

הגבול תלוי בסדרה z_n.
$z_n = \frac{1}{n}$. במקרה זה נקבל:

$$\lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$z_n = \frac{1}{n} i$$

$$\lim \frac{-\frac{1}{n} i}{\frac{1}{n} i} = -1$$

קיבלנו שהפונקציה לא גזירה.

2. $f(z)=|z|$

פונקציית הנורמה אינה גזירה אפילו בממשיים! למשל, בנקודה $z_0=0$:

נבחר $z_n=\frac{1}{n}$

$$f'(0)=\lim\frac{f(\frac{1}{n}+0)-f(0)}{\frac{1}{n}}=1$$

נבחר $z_n=-\frac{1}{n}$

$$f'(0)=\lim\frac{f(-\frac{1}{n}+0)-f(0)}{-\frac{1}{n}}=-1$$

3. $f(z)=Re(z)$

$$f'(z_0)=\lim_{z_n\to 0}\frac{Re(z_0+z_n)-Re(z_0)}{z_n}=$$

$$\lim_{z_n\to 0}\frac{Re(z_0)+Re(z_n)-Re(z_0)}{z_n}=\lim_{z_n\to 0}\frac{Re(z_n)}{z_n}$$

$$z_n=\frac{1}{n}$$

$$\lim\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$$

$$z_n=\frac{1}{n}i$$

$$\lim\frac{0}{\frac{1}{n}i}=0$$

מסקנה: פונקציית החלק הממשי אינה גזירה.

4. $f(z)=Im(z)$

$$f'(z_0)=\lim_{z_n\to 0}\frac{Im(z_0+z_n)-Im(z_0)}{z_n}=\lim_{z_n\to 0}\frac{Im(z_0)+Im(z_n)-Im(z_0)}{z_n}=$$

$$\lim_{z_n\to 0}\frac{Im(z_n)}{z_n}$$

$$z_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim \frac{0}{\frac{1}{n}} = 0$$

$$z_n = \frac{1}{n}i$$

$$\lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}i} = \frac{1}{i} = -i$$

מסקנה: הפונקציה $f(z) = Im(z)$ אינה גזירה.

נגזרות חלקיות

הגדרה: תהי $U(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
יש לה 2 נגזרות חלקיות, לפי המשתנה הראשון והשני.

$$U_x, U_y$$

איך גוזרים לפי x? מתייחסים לy כפרמטר.
איך גוזרים לפי y? מתייחסים לx כפרמטר.
לדוגמא:

$$U(x, y) = 2xy + x\cos y + y^2 x$$

$$U_x = 2y + \cos y + y^2$$

$$U_y = 2x - x\sin y + 2yx$$

דוגמא נוספת:

$$U(x, y) = e^x y^3$$

$$U_x = e^x y^3$$

$$U_y = 3e^x y^2$$

משפט: אם U היא פונקציה רציפה בשני משתנים, אז

$$U_{xy} = U_{yx}$$

נדגים:

$$U(x,y) = 2xy + x\cos y + y^2x$$

$$U_x = 2y + \cos y + y^2$$

$$U_y = 2x - x\sin y + 2yx$$

$$U_{xy} = 2 - \sin y + 2y$$

$$U_{yx} = 2 - \sin y + 2y$$

בחזרה לנגזרות מרוכבות

כזכור, כל פונקציה מרוכבת מורכבת משתי פונקציות בשני משתנים:

$$f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$$

משפט: f גזירה אמ"ם f רציפה ולU ולV יש נגזרות חלקיות, ומתקיים:

$$U_x = V_y$$

$$U_y = -V_x$$

הקשר הזה נקרא "משוואות קושי רימן".
בנוסף, במידה וf גזירה, נקבל:

$$f'(x+iy) = U_x + iV_x = V_y - iU_y$$

דוגמאות:
1. $f(z) = \bar{z}$.

$$f(x+iy) = x - iy$$

$$U(x,y) = x$$

$$V(x,y) = -y$$

$$U_x = 1$$

$$V_y = -1$$

$$U_x \neq V_y$$

לכן הפונקציה לא גזירה.

.2 $f(z) = z^2$

$$f(x+iy) = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$U(x,y) = x^2 - y^2$$

$$V(x,y) = 2xy$$

$$U_x = 2x$$

$$V_y = 2x$$

$$U_x = V_y$$

$$U_y = -2y$$

$$V_x = 2y$$

$$U_y = -V_x$$

כלומר, משוואות קושי-רימן מתקיימות, ולכן הפונקציה גזירה.
נחשב את הנגזרת:

$$f'(x+iy) = U_x + iV_x = 2x + i2y = 2(x+iy)$$

כלומר, $f(z) = z^2$

וקיבלנו שבנגזרת שווה ל:

$$f'(z) = 2z$$

3. $f(x+iy) = x\cos y + iy\cos x$

פתרון:

$$U(x,y) = x\cos y$$

$$V(x,y) = y\cos x$$

$$U_x = \cos y$$

$$V_y = \cos x$$

$$U_x \neq V_y$$

לכן הפונקציה אינה גזירה.

4. $f(z) = z \cdot \bar{z}$

$$f(x+iy) = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$$

$$U(x,y) = x^2 + y^2$$

$$V(x,y) = 0$$

$$U_x = 2x$$

$$V_y = 0$$

$$U_x \neq V_y$$

לכן הפונקציה אינה גזירה.

5. $f(x+iy) = x + iy + y - xi$

$$U(x,y) = x + y$$

$$V(x,y) = y - x$$

$$U_x = 1$$

$$V_y = 1$$

$$U_x = V_y$$

$$U_y = 1$$

$$V_x = -1$$

$$U_y = -V_x$$

משוואות קושי רימן מתקיימות, לכן הפונקציה גזירה.

$$f'(x+iy) = 1 - i$$

הפונקציה המעריכית

מטרה: להגדיר פונקציה e^z לכל מספר מרוכב.

תנאי ראשון: נרצה להגדיר פונקציה מרוכבת, שעל כל מספר ממשי, הערך שהיא תחזיר יהיה e^x הממשי המוכר.

איזה תכונות יש לפונקציה הממשית $f(x) = e^x$?

1. רציפה
2. גזירה
3. $f' = f$
4. $e^{x+y} = e^x e^y$

כעת, אנחנו נחפש פונקציה $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ שתקיים:

1. רציפה
2. גזירה
3. $f' = f$
4. $f(z_1 + z_2) = f(z_1) f(z_2)$
5. לכל מספר ממשי $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

טענה: הפונקציה הבאה תעשה את העבודה:

$$f(x+iy) = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

נוכיח שהפונקציה מקיימת את כל התכונות שאנחנו רוצים:

$$U(x,y) = e^x \cos y$$

$$V(x,y) = e^x \sin y$$

1. U ו-V הן מכפלות של פונקציות ממשיות רציפות ולכן רציפות בעצמן. לכן f רציפה.
2.

$$U_x = e^x \cos y$$

$$V_y = e^x \cos y$$

$$U_x = V_y$$

$$U_y = -e^x \sin y$$

$$V_x = e^x \sin y$$

$$U_y = -V_x$$

משוואות קושי-רימן מתקיימות ולכן הפונקציה גזירה.

3.

$$f' = U_x + iV_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = f$$

4. צריך להוכיח:

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$$

נסמן

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$f(x+iy) = e^x cis(y)$$

$$f(z_1 + z_2) = f(x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2) = f(x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)) =$$

$$e^{x_1+x_2} cis(y_1 + y_2)$$

$$f(z_1)f(z_2) = f(x_1 + iy_1)f(x_2 + iy_2) = e^{x_1} cis(y_1)e^{x_2} cis(y_2) = e^{x_1+x_2} cis(y_1 + y_2)$$

.5

$$f(x + i0) = e^x cis(0) = e^x \cdot 1 = e^x$$

מסקנה: לכל מספר מרוכב, נגדיר

$$e^{x+iy} = e^x cis(y)$$

דוגמאות:

.1

$$e^{i\pi} = e^0 cis(\pi) = -1$$

.2

$$e^{2\pi i} = e^0 cis(2\pi) = 1$$

.3

$$e^{3+\dfrac{\pi}{2}i} = e^3 cis(\frac{\pi}{2}) = e^3 i$$

.4

$$e^{\ln 2+\frac{\pi}{4}i} = 2cis(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

תכונות של הפונקציה המעריכית המרוכבת:

.1

$$|e^{x+iy}| = |e^x cis(y)| = e^x$$

$$e^x cis(y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$$|e^x cis(y)| = \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} = \sqrt{e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y)} = e^x$$

במילים אחרות:

$$|e^z| = e^{Re(z)}$$