מבוא לאנליזה מתקדמת תרגול 10 תשפ"א

3 בינואר 2021

1 מד"ר

1.1 מד"ר לינארית מסדר ראשון

מד"ר זו משוואה שמערבת פונקציה ונגזרותיה, כאשר היא לינארית מסדר ראשון היא מהצורה:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

הגדרת לינאריות: החזקות של (הפונקציה y ונגזרותיה), הן 1. כלומר משוואה מהצורה

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y = b(x)$$

הגדרת הומגנית: כאשר $b(x) = 0$.
למשל, המשוואה הבאה לא לינארית:

$$(y'')^2 + y' + e^y = \sin x$$

המשוואה

$$y''' + \sin xy = e^x$$

כן לינארית (מסדר שלישי), לא הומוגנית. לעומת זאת:

$$y^{(4)} + \sin xy'' + e^x y = 0$$

היא מד"ר לינארית מסדר רביעי הומוגנית.

1.1.1 הומוגנית

נתחיל במשוואות הומוגניות, בהן $b(x) = 0$.
תרגילים:

1. פתרו את המשוואה $y' + \underbrace{\ln(x)}_{a(x)} \cdot y = 0$

פתרון: הפתרון הוא מהצורה

$$y = ce^{-\int a(x)dx}$$

נחשב את האינטגרל. לצורך כך ניזכר באינטגרציה בחלקים:

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

$$\int \ln x dx = \{f' = 1, g = \ln x, f = x, g' = \frac{1}{x}\} = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x$$

ולכן

$$y = c \cdot e^{-(x \ln x - x)} = ce^{x - x \ln x}$$

2. מצאו פתרון פרטי של המוואה משאלה קודמת, המקיים $y(1) = 1$.

פתרון:

$$1 = y(1) = ce^{1 - 1 \ln 1} = ce$$

$$c = e^{-1}$$

כלומר הפתרון הפרטי הוא

$$y = e^{-1}e^{x - x \ln x} = e^{x - x \ln x - 1}$$

3. מצאו פתרון פרטי למשוואה $y' + y \sin x = 0$ המקיים $y(0) = 1$.

פתרון: נמצא תחילה פתרון כללי:

$$y = ce^{-\int \sin x dx} = ce^{\cos x}$$

נציב תנאי התחלה ונקבל:

$$1 = y(0) = ce^{\cos 0} = ce$$

$$c = e^{-1}$$

ולכן נקבל:

$$y = e^{-1}e^{\cos x} = e^{\cos x - 1}$$

1.1.2 לינארית מסדר ראשון לא הומוגנית

מד"ר מהצורה

$$y' + a(x)y = b(x)$$

נוסחא כללית:

$$y = e^{-A(x)}\left(\int b(x)e^{A(x)}dx + c\right)$$

כאשר

$$A(x) = \int a(x)dx$$

תרגילים:

1. פתרו את המשוואה $y' + y = x$
פתרון: נחשב תחילה את

$$A(x) = \int a(x)dx = \int 1dx = x$$

ולכן, לפי הנוסחא:

$$y = e^{-x}\left(\int xe^x dx + c\right)$$

נחשב את האינטגרל:

$$\int xe^x = \{f' = e^x, g = x, f = e^x, g' = 1\} = xe^x - \int e^x = xe^x - e^x = e^x(x-1)$$

נחזור לפונקציה:

$$y = e^{-x}\left(e^x(x-1) + c\right) = x - 1 + ce^{-x}$$

(א) מצאו פתרון פרטי המקיים $y(2) = 1$

נציב בפתרון הכללי:

$$1 = y(2) = 2 - 1 + ce^{-2}$$

$$ce^{-2} = 0$$

$$c = 0$$

ונקבל

$$y = x - 1$$

2. פתרו את המד"ר $y' + y\sin x = 5e^{\cos x}$ עם תנאי התחלה $y(0) = 1$

פתרון: נחשב תחילה:

$$A(x) = \int a(x)dx = \int \sin x dx = -\cos x$$

נציב כעת בנוסחא:

$$y = e^{\cos x}\left(\int 5e^{\cos x}e^{-\cos x}dx + c\right) = e^{\cos x}\left(5x + c\right)$$

כעת נציב תנאי התחלה:

$$1 = y(0) = e^{\cos 0}(5 \cdot 0 + c) = ce$$

$$c = e^{-1}$$

וקיבלנו:

$$y = e^{\cos x}\left(5x + e^{-1}\right) = 5xe^{\cos x} + e^{\cos x - 1}$$

1.2 מד"ר פרידה

מד"ר פרידה היא מהצורה

$$y' = f(y)g(x)$$

ואז נרשום:

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x)$$

$$\frac{1}{f(y)}dy = g(x)dx$$

ואז עושים אינטגרל בשני הצדדים ומקבלים את הפתרון.

תרגילים:

$$y' = (y-1)^2 =$$

נקבל: $f(y) = (y-1)^2, g(x) = 1$ ולכן נקבל

$$\int \frac{1}{(y-1)^2}dy = \int 1dx$$

נקבל משמאל:

$$\int \frac{1}{(y-1)^2}dy = \int (y-1)^{-2}dy = \frac{(y-1)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{y-1}$$

מימין:

$$\int 1dx = x + c$$

בסה"כ:

$$-\frac{1}{y-1} = x + c$$

$$-\frac{1}{x+c} = y - 1$$

$$y = 1 - \frac{1}{x+c}$$