שאלות חזרה

דוגמא: יהי M משטח עם אטלס $A=\{(F_1,U_1),(F_2,U_2)\}$ ונניח ש־ $x\in F_1(U_1)\cap F_2(U_2)$. הגדירו מרחב משיק $T_x(M)$ והראו שמרחב זה אינו תלוי בבחירת המפה (F_i,U_i).

פתרון: נניח ש־ M הוא משטח k מימדי ב־$\mathbb{R}^n$ ונניח שעבור סביבה $U\subseteq\mathbb{R}^n$ של $x\in M$ ניתן למצוא קבוצה פתוחה $V\subseteq\mathbb{R}^k$ ופונקציה גזירה ברציפות וחח"ע

$$r:V\to M\cap U$$

עם דיפרנציאל בעל דרגה מקסימלית ב־V. נניח גם ש־$r(v_0)=x$ עבור $v_0\in V$, אז המרחב המשיק ל־M בנקודה x מוגדר כ־

$$T_x=\{D_r(v_0)y:y\in\mathbb{R}^k\}$$

$$=\{y_1\partial_1 r(v_0)+...+y_k\partial_k r(v_0):y_1,...,y_k\in\mathbb{R}\}=\mathtt{span}\{\partial_1 r(v_0),...,\partial_k r(v_0)\}.$$

כעת עלינו להראות שהמרחב T_x איננו תלוי בבחירת הפרמטריזציה שאנו בוחרים עבור המשטח M בסביבה של x. כלומר אם

$$F_1:U_1\to M,F_2:U_2\to M$$

הן שתי פרמטריזציות, חח"ע עם דיפרנציאל בעל דרגה מקסימלית, של המשטח ה־k מימדי M בסביבה של x ואם

$$F_1(v_1)=F_2(v_2)=x,$$

אז

$$\mathtt{span}\{\partial_1 F_1(v_1),...,\partial_k F_1(v_1)\}=\mathtt{span}\{\partial_1 F_2(v_2),...,\partial_k F_2(v_2)\}.$$

נראה זאת בדרך הבאה, נסמן

$$W_1=\mathtt{span}\{\partial_1 F_1(v_1),...,\partial_k F_1(v_1)\},W_2=\mathtt{span}\{\partial_1 F_2(v_2),...,\partial_k F_2(v_2)\}$$

ונוכיח ש־ $W_1^\perp=W_2^\perp$ ואז כיוון ש־$\mathbb{R}^n$ הוא ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$ נקבל ש־

$$W_1=(W_1^\perp)^\perp=(W_2^\perp)^\perp=W_2.$$

כעת ניזכר שאחת ההגדרות השקולות של משטח k מימדי M היא שבכל סביבה ניתן לתאר את M כאוסף האפסים של פונקציה מ־$\mathbb{R}^n$ ל־$\mathbb{R}^{n-k}$ שהיא חח"ע

ובעלת דיפרנציאל עם דרגה מקסימלית. בפרט עבור הנקודה x נובע שקיימת סביבה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ של x כך ש־

$$M \cap U = \{y : \Phi(y) = 0\}$$

כאשר

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$$

היא פונקציה חח"ע עם דיפרנציאל בעל דרגה מקסימלית. כיוון שהתמונה של F_1 גם נמצאת בסביבה של x ניתן להניח ש־$F_1(U_1) \subseteq M \cap U$ (כי תמיד אפשר לקחת תת־קבוצה של U_1 שמכילה את v_1 כך שתמונתה מוכלת ב־$M \cap U$). לכן נקבל ש־

$$\Phi(F_1(y)) = 0, y \in U_1.$$

כלומר הפונקציה $\Phi \circ F_1$ מתאפסת על U_1 ולכן גם הדיפרנציאל שלה, שהוא מכפלת הדיפרנציאלים של Φ ו־F_1, מתאפס על U_1:

$$D_\Phi(F_1(y)) \cdot D_{F_1}(y) = 0.$$

בפרט זה מתקיים עבור $y = v_1$, כלומר

$$D_\Phi(x) \cdot D_{F_1}(v_1) = 0$$

או באופן מפורש

$$\begin{pmatrix} \nabla\Phi_1(x) \\ \nabla\Phi_2(x) \\ \cdots \\ \nabla\Phi_{n-k}(x) \end{pmatrix} \left(\partial_1 F_1(v_1)^T, \partial_2 F_1(v_1)^T, ..., \partial_k F_1(v_1)^T \right) = \bar{0}$$

כלומר כל הוקטורים

$$\nabla\Phi_1(x), \nabla\Phi_2(x), ..., \nabla\Phi_{n-k}(x)$$

מאונכים לכל אחד מהוקטורים

$$\partial_1 F_1(v_1)^T, ..., \partial_k F_1(v_1)^T$$

ולכן

$$\nabla\Phi_1(x), \nabla\Phi_2(x), ..., \nabla\Phi_{n-k}(x) \in W_1^\perp.$$

כמו כן הוקטורים

$$\nabla\Phi_1(x), \nabla\Phi_2(x), ..., \nabla\Phi_{n-k}(x)$$

בת"ל כי ל־Φ יש דרגה מקסימלית. לכן מכיוון ש־$\dim W_1^{\perp} = n-k$ (כי $\dim W_1 = k$) נובע ש־

$$W_1^{\perp} = \mathtt{span}\{\nabla\Phi_1(x), \nabla\Phi_2(x), ..., \nabla\Phi_{n-k}(x)\}.$$

באותו אופן מראים ש־

$$W_2^{\perp} = \mathtt{span}\{\nabla\Phi_1(x), \nabla\Phi_2(x), ..., \nabla\Phi_{n-k}(x)\}$$

ולכן $W_1^{\perp} = W_2^{\perp}$.

<u>דוגמא</u>: תהי $M \subset \mathbb{R}^{n-1}$ תת־קבוצה פתוחה ותהי

$$\Phi : M \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

העתקה חח"ע עם נגזרת מקסימלית בכל נקודה. נסמן $M_{t_0} = \Phi\left(M \times \{t_0\}\right)$ ונניח שלכל $x \in M$ העקומה $\gamma_x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ המוגדרת לפי

$$\gamma_x(t) = \Phi(x,t), t \in [a,b]$$

היא בעלת מהירות יחידה ואורתוגונלית למשטח M_t לכל $t \in [a,b]$. נסמן $A = \Phi\left(M \times [a,b]\right)$, הוכיחו כי

$$V_n(A) = \int_a^b V_{n-1}\left(M_t\right) dt.$$

<u>פתרון</u>: כיוון ש־

$$\Phi = \Phi(x,t), x \in M, t \in [a,b]$$

היא פרמטריזציה של A ו־ Φ היא העתקה חח"ע בעלת נגזרת עם דרגה מקסימלית, נובע מנוסחת השטח ש־

$$V_n(A) = \int_a^b \int_M \sqrt{\det D_\Phi(x,t)^T \cdot D_\Phi(x,t)} dM dt.$$

לכן עלינו להוכיח שלכל $t \in [a,b]$ מתקיים

$$\int_M \sqrt{\det D_\Phi(x,t)^T \cdot D_\Phi(x,t)} dM = V_{n-1}\left(M_t\right). \qquad (1)$$

מהגדרת המשטח M_t נובע שהפונקציה

$$F_t(x) = \Phi(x,t), x \in M$$

היא פרמטריזציה חח"ע של M_t. כיוון שמהנתון γ_x אורתוגונלית ל־M_t בנקודה $\Phi(x,t)$ וכיוון ש־

$$\frac{\partial F_t}{\partial x_i}(x), i=1,...,n-1$$

הם וקטורים שפורשים את המרחב המשיק ל־M_t בנקודה $\Phi(x,t)$ נובע ש־

$$\left\langle \frac{d\gamma_x}{dt}(t), \frac{\partial F_t}{\partial x_i}(x) \right\rangle = 0, i=1,...,n-1.$$

כלומר

$$\left\langle \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_i} \right\rangle = 0, i=1,...,n-1.$$

לכן נקבל ש־

$$\det D_\Phi(x,t)^T \cdot D_\Phi(x,t)$$

$$= \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(x,t)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_{n-1}(x,t)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_n(x,t)}{\partial x_1} \\ \dots\dots\dots & & & \\ \frac{\partial \Phi_1(x,t)}{\partial x_{n-1}} & \dots & \frac{\partial \Phi_{n-1}(x,t)}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \Phi_n(x,t)}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial \Phi_1(x,t)}{\partial t} & \dots & \frac{\partial \Phi_{n-1}(x,t)}{\partial t} & \frac{\partial \Phi_n(x,t)}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(x,t)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1(x,t)}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \Phi_1(x,t)}{\partial t} \\ \dots\dots\dots & & & \\ \frac{\partial \Phi_{n-1}(x,t)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_{n-1}(x,t)}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \Phi_{n-1}(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial \Phi_n(x,t)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n(x,t)}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \Phi_n(x,t)}{\partial t} \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} \left\langle \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_1} \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_{n-1}} \right\rangle & 0 \\ \dots\dots\dots & & & \\ \left\langle \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_1} \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_{n-1}} \right\rangle & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \left\langle \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} \right\rangle \end{vmatrix}.$$

מהנתון ש־γ_x היא בעלת מהירות יחידה נובע ש־

$$\left\langle \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} \right\rangle = 1.$$

לכן נקבל ש־

$$\det D_\Phi(x,t)^T \cdot D_\Phi(x,t) = \begin{vmatrix} \left\langle \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_1} \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_{n-1}} \right\rangle \\ \dots\dots\dots & & \\ \left\langle \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_1} \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_{n-1}} \right\rangle \end{vmatrix}.$$

כעת מהשוויון האחרון נובע ש־

$$\int_M \sqrt{\det D_\Phi(x,t)^T \cdot D_\Phi(x,t)} dM$$

$$= \int_M \sqrt{\det D_{F_t}(x)^T \cdot D_{F_t}(x)} dM = V_{n-1}(M_t)$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בהגדרה של שטח של משטח. לכן הוכחנו את נוסחא (1).

דוגמא: הוכיחו שנוסחת השטח של משטח מוגדרת היטב. כלומר אם

$$F_1 : A_1 \to M, F_2 : A_2 \to M$$

הן שתי פרמטריזציות חד־חד ערכיות ועל של המשטח ה־k מימדי $M \subset \mathbb{R}^n$ בעלות נגזרת עם דרגה מקסימלית, כאשר $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^k$, אז

$$\int_{A_1} \sqrt{\det D_{F_1}(x)^T \cdot D_{F_1}(x)} dx = \int_{A_2} \sqrt{\det D_{F_2}(x)^T \cdot D_{F_2}(x)} dx. \qquad (2)$$

פתרון: מהנתון על הפונקציות F_1 ו־F_2 נובע שהפונקציה $\Phi : A_1 \to A_2$ המוגדרת לפי

$$\Phi(x) = F_2^{-1}\left(F_1(x)\right), x \in A_1$$

היא חח"ע ועל. לכן ניתן לבצע את החלפת המשתנים $x = \Phi(y)$ באינטגרל הימני של המשוואה (2) ו־

$$dx = J_\Phi(y) dy = \sqrt{\det D_\Phi(y)^T \cdot D_\Phi(y)} dy.$$

לכן נקבל ש־

$$\int_{A_2} \sqrt{\det D_{F_2}(x)^T \cdot D_{F_2}(x)} dx$$

$$= \int_{A_1} \sqrt{\det D_{F_2}(\Phi(y))^T \cdot D_{F_2}(\Phi(y))} \sqrt{\det D_\Phi(y)^T \cdot D_\Phi(y)} dy$$

כעת נשים לב שכיוון ש־$D_\Phi(y)$ היא מטריצה ריבועית נובע ש־

$$\det D_\Phi(y)^T \cdot D_\Phi(y) = \det D_\Phi(y)^T \cdot \det D_\Phi(y).$$

לכן

$$\int_{A_2} \sqrt{\det D_{F_2}(x)^T \cdot D_{F_2}(x)} dx$$

$$= \int_{A_1} \sqrt{\det \left[D_{F_2}(\Phi(y))^T \cdot D_{F_2}(\Phi(y))\right] \cdot \det D_\Phi(y)^T \cdot \det D_\Phi(y)} dy$$

$$= \int_{A_1} \sqrt{\det D_\Phi(y)^T \cdot \det\left[D_{F_2}(\Phi(y))^T \cdot D_{F_2}(\Phi(y))\right] \cdot \det D_\Phi(y)}dy$$

$$= \int_{A_1} \sqrt{\det\left[[D_\Phi(y)^T \cdot D_{F_2}(\Phi(y))^T] \cdot [D_{F_2}(\Phi(y)) \cdot D_\Phi(y)]\right]}dy$$

$$= \int_{A_1} \sqrt{\det\left[[D_{F_2}(\Phi(y)) \cdot D_\Phi(y)]^T \cdot [D_{F_2}(\Phi(y)) \cdot D_\Phi(y)]\right]}dy \tag{3}$$

כעת מהשוויון $F_2\left(\Phi(x)\right) = F_1(x)$ נובע ש־

$$D_{F_2}(\Phi(x)) \cdot D_\Phi(x) = D_{F_1}(x).$$

לכן אם נציב את זהות זו באינטגרל (3) נקבל את הטענה.