תרגיל 10 – מתמטיקה לכימאים ג'

1. עבור המד"ר $2xy''+y'+xy=0$.

1.1 קבעו אם מובטח קיום פתרון מהצורה $x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_0\neq 0)$ עבור $0<x<\delta$ לפי המשפט על סינגולריות רגולרית. אם כן, המשיכו לסעיפים הבאים.

פתרון: נבדוק אם הנקודה $x=0$ היא סינגולרית רגולרית.

$$P(x)=x\Rightarrow P(0)=0$$

נחלק את המד"ר במקדם של y'' ונקבל:

$$y''+\frac{1}{2x}y'+\frac{1}{2}y=0$$

נסמן: $C(x)=\frac{1}{2x},D(x)=\frac{1}{2}$ ונחשב את הגבולות

$$c_0=\lim_{x\to 0}C(x)x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$d_0=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}x^2=0$$

מכיון שהגבולות קיימים וסופיים הנקודה $x=0$ היא סינגולרית רגולרית ולמד"ר הנתונה קיים פתרון מהצורה $x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_0\neq 0)$ עבור $0<x<\delta$.

1.2 מצאו את ערכי r עבורם יש למד"ר פתרון מהסוג $x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_0\neq 0)$ עבור $0<x<\delta$.

פתרון: נמצא את ערכי r המתאימים בעזרת המשוואה:

$$r(r-1)+\frac{1}{2}r=0$$

$$r^2-r+\frac{1}{2}r=0$$

$$r^2-\frac{1}{2}r=0$$

$$r(r-\frac{1}{2})=0$$

$$r_1=\frac{1}{2},r_2=0$$

$r_{1,2}$ ממשיים וכן, $r_1-r_2=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$ אינו מספר שלם,

לכן, $r_{1,2}$ שמצאנו הם ערכי r הדרושים.

1.3. לכל אחד מערכי r הנ"ל, מצאו נוסחת נסיגה (נוסחת רקורסיה) לחישוב a_n.

פתרון: עלינו לפתח את

$$C(x)x = \frac{1}{2x}\cdot x = \frac{1}{2},$$
$$D(x)x^2 = \frac{1}{2}x^2$$

לטורי חזוקת סביב אפס.
נשים לב, הם כבר מפותחים לטורי חזקות. אכן:

$$C(x)x = 1 = \frac{1}{2}x^0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \dots$$
$$D(x)x^2 = 0x^0 + 0x + \frac{1}{2}x^2 + 0x^3 +$$

המקדמים של טורי החזקות הם:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n=0 \\ 0 & n\ge 1 \end{cases} \qquad d_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n=2 \\ 0 & n\ne 2 \end{cases}$$

על מנת למצוא נוסחת נסיגה נשתמש בנוסחה:

$$\forall n\ge 1 \qquad F(r+n)a_n + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k\left[(r+k)c_{n-k} + d_{n-k}\right]}_{(*)} = 0$$

כאשר:

$$F(r+n) = (r+n)(r+n-1) + \frac{1}{2}(r+n)$$
$$= (r+n)(r+n-1+\frac{1}{2})$$
$$= (r+n)(r+n-\frac{1}{2})$$

נחשב את הסכום $(*)$.
נבדוק מתי c_{n-k} או d_{n-k} שונים מאפס.
$c_{n-k} \ne 0 \Leftrightarrow n-k=0 \Leftrightarrow k=n$.
לכן, לכל $0\le k\le n-1$, $c_{n-k}=0$.
$d_{n-k}\ne 0 \Leftrightarrow n-k=2 \Leftrightarrow k=n-2$
לכן, עבור $0\le k\le n-1$, רק עבור $k=n-2$ נקבל $d_{n-k}\ne 0$.
מכיוון שעבור $n=1$, $k=n-2=-1$ לא בתחום $0\le k\le n-1$, נחשב את הסכום $(*)$ בנפרד עבור $n=1$ ועבור כל $n\ge 2$.

עבור $n=1$, לכל $0\le k\le n-1$ הקבועים $c_{n-k}=0$ וכן $d_{n-k}=0$ לכן הסכום $(*)$ שווה אפס.
עבור $n\ge 2$, האיבר היחיד בסכום שלא מתאפס הוא האיבר המתקבל מהצבת $k=n-2$ (שקיים כי $n\ge 2$). לכן, במקרה זה:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k\left[(r+k)c_{n-k}+d_{n-k}\right]=a_{n-2}\left[(r+n-2)c_{n-(n-2)}+d_{n-(n-2)}\right]=a_{n-2}\left[0+d_2\right]=a_{n-2}\left[0+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}a_{n-2}$$

לכן, קיבלנו שתי משוואות:

עבור $n=1$,

$$F(r+n)a_n+\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k\left[(r+k)c_{n-k}+d_{n-k}\right]}_{(*)}=0$$

$$(r+n)(r+n-\frac{1}{2})a_n=0$$

$$a_n=0\xrightarrow{n=1}$$

$$a_1=0$$

עבור $n\geq 2$,

$$F(r+n)a_n+\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k\left[(r+k)c_{n-k}+d_{n-k}\right]}_{(*)}=0$$

$$(r+n)(r+n-\frac{1}{2})a_n+\frac{1}{2}a_{n-2}=0$$

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{2(r+n)(r+n-\frac{1}{2})}$$

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{(r+n)(2r+2n-1)}$$

עבור: $r_1=\frac{1}{2}$ נקבל כי לכל $n\geq 2$

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{(\frac{1}{2}+n)(1+2n-1)}=-\frac{a_{n-2}}{(\frac{1}{2}+n)2n}=-\frac{a_{n-2}}{n(2n+1)}$$

לכן, נוסחת הנסיגה היא:

$$\begin{cases} a_1=0 \\ \forall n>1 \quad -\dfrac{a_{n-2}}{n(2n+1)} \end{cases}$$

עבור: $r_2=0$ נקבל כי לכל $n\geq 2$

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{(0+n)(0+2n-1)}=-\frac{a_{n-2}}{n(2n-1)}$$

לכן, נוסחת הנסיגה היא:

$$\begin{cases} a_1=0 \\ \forall n>1 \quad a_n=-\dfrac{a_{n-2}}{n(2n-1)} \end{cases}$$

2. (תזכורת) חשבו את האינטגרלים הבאים:

2.1 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ כאשר D הוא התחום המוגבל ע"י הפונקציות $y=x^2$ ו $y=\sqrt{x}$.

פתרון:

נצייר את התחום. לשם כך, נמצא נקודת חיתוך של הפונקציות:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$$

$$x^2=\sqrt{x}$$

$$x^2-\sqrt{x}=0$$

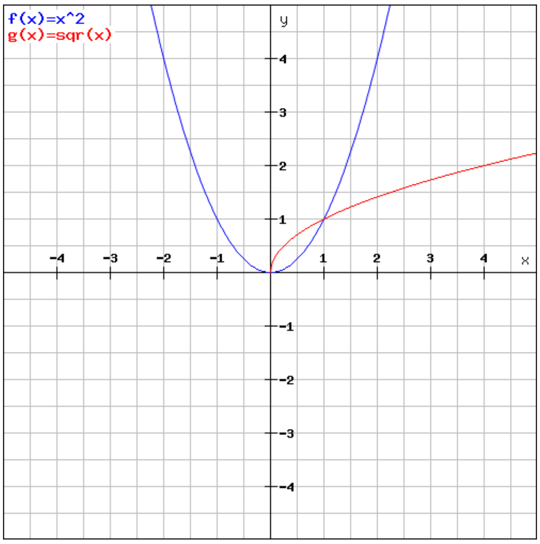
$$\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)=0$$

$$\sqrt{x}=0 \quad or \quad x\sqrt{x}=1$$

$$x=0 \quad or \quad x=1$$

לכן, נקודות החיתוך של הפונקציות הן: $(0,0)$ ו $(1,1)$.

השרטוט נראה כך,



לכן, על מנת לעבור על התחום המתואר:

$$0\le x\le 1$$

$$x^2\le y\le \sqrt{x}$$

לכן,

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x+y)dydx=\int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1\left[\left(x\sqrt{x}+\frac{(\sqrt{x})^2}{2}\right)-\left(xx^2+\frac{(x^2)^2}{2}\right)\right]dx$$

$$=\int_0^1\left(x^{\frac{3}{2}}+\frac{x}{2}-x^3-\frac{x^4}{2}\right)dx=\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right]_0^1=\frac{1}{\frac{5}{2}}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{10}=\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$

2.2. $\iint_D ye^x dxdy$ כאשר D הוא התחום המוגבל ע"י העקומים $x = y^2$ ו $y = x-2$.

פתרון:

נצייר את התחום. לשם כך, נמצא את נקודת החיתוך של העקומים:

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = x-2 \end{cases}$$

$$y = y^2 - 2$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

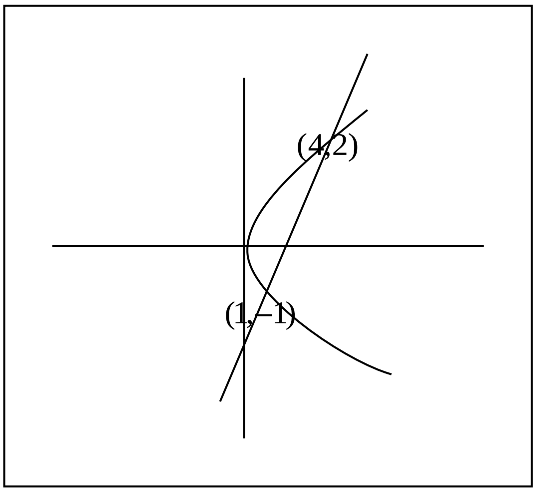
$$(y-2)(y+1) = 0$$

$$y = 2 \qquad y = -1$$

$$x = 4 \qquad x = 1$$

לכן, נקודות החיתוך של העקומים הן: $(4,2)$ ו $(1,-1)$.

(הפרבולה, $x = y^2$ היא פרבולה סימטרית ביחס לציר ה x , המוגדרת רק ל x ים חיוביים. על מנת לצייר את הישר מספיק למתוח קו ישר בין נקודות החיתוך שלו עם הפרבולה). לכן, השרטוט נראה כך,



לכן, על מנת לעבור על התחום המתואר:
נעבור לפי רכיב ה y קודם:

$$-1 \le y \le 4$$

לכל נקודה בתחום הנ"ל x רץ מהפרבולה לישר, כלומר:
מ $x = y^2$ עד, $y = x-2 \Leftarrow x = y+2$. לכן,

$$y^2 \le x \le y+2$$

לכן,

$$\iint_D ye^x dxdy = \int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} ye^x dxdy = \int_{-1}^{2}\left[ye^x\right]_{y^2}^{y+2}dy = \int_{-1}^{2}\left(ye^{y+2}-ye^{y^2}\right)dy = \int_{-1}^{2} ye^{y+2}dy - \int_{-1}^{2} ye^{y^2}dy =$$

$$\begin{bmatrix} u = y & du = dy \\ dv = e^{y+2} & v = e^{y+2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t = y^2 \\ dt = 2ydy \Rightarrow ydy = \dfrac{dt}{2} \\ 1 \le t \le 4 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\left[ye^{y+2}\right]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} e^{y+2}dy\right) - \int_{1}^{4} e^t \frac{dt}{2} = \left(2e^4 + e - \left[e^{y+2}\right]_{-1}^{2}\right) - \left[\frac{e^t}{2}\right]_1^4 = 2e^4 + e - e^4 + e - \left(\frac{e^4}{2} - \frac{e}{2}\right)$$

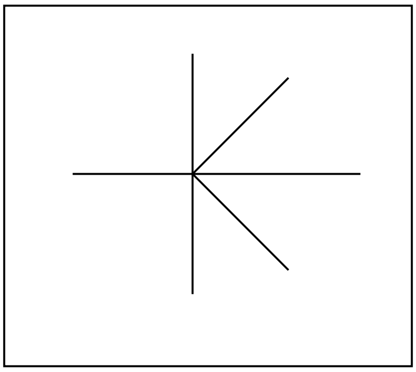
$$= \frac{1}{2}e^4 + 2\frac{1}{2}e$$

2.3 $\iint_D xydxdy$ כאשר D הוא התחום המוגבל ע"י הגרפים של $x=|y|$ ו $y=2x-6$.

פתרון:

נצייר את התחום.

נשים לב, העקום $x=|y|$ מוגדר רק ל $x\ge 0$. בתחום $x\ge 0$ הוא מייצג את שני הישרים: $x=y$ ו $x=-y$. לכן, הגרף $x=|y|$ נראה כך:

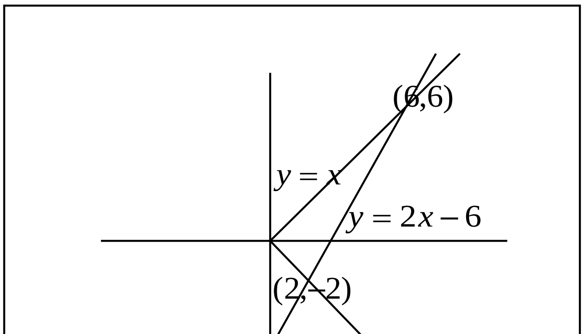


נמצא את נקודות החיתוך של הישרים $x=y$ ו $x=-y$ בתחום $x\ge 0$ עם הישר $y=2x-6$.

$$\begin{cases} x = y \\ y = 2x-6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -y \\ y = 2x-6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc} x = 2x-6 & -x = 2x-6 \\ x = 6 \ge 0 & 3x = 6 \\ y = 6 & x = 2 \ge 0 \\ (6,6) & (2,-2) \end{array}$$

לכן, התחום המתואר נראה כך:



נעבור עליו בחלקים:
כל ההיטל על ציר ה x הוא: $0 \le x \le 6$.

עבור $0 \le x \le 2$, $-x \le y \le x$
עבור $2 \le x \le 6$, $2x-6 \le y \le x$.
לכן,

$$\iint_D xydxdy = \int_0^2 \int_{-x}^{x} xydydx + \int_2^6 \int_{2x-6}^{x} xydydx = \int_0^2 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{-x}^{x} dx + \int_2^6 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{2x-6}^{x} dx =$$

$$\int_0^2 \left(\frac{xx^2}{2} - \frac{x(-x)^2}{2}\right)dx + \int_2^6 \left(\frac{xx^2}{2} - \frac{x(2x-6)^2}{2}\right)dx =$$

$$0 + \int_2^6 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x(4x^2-24x+36)}{2}\right)dx =$$

$$\int_2^6 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{4x^3-24x^2+36x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_2^6 \left(x^3-(4x^3-24x^3+36x)\right)dx$$

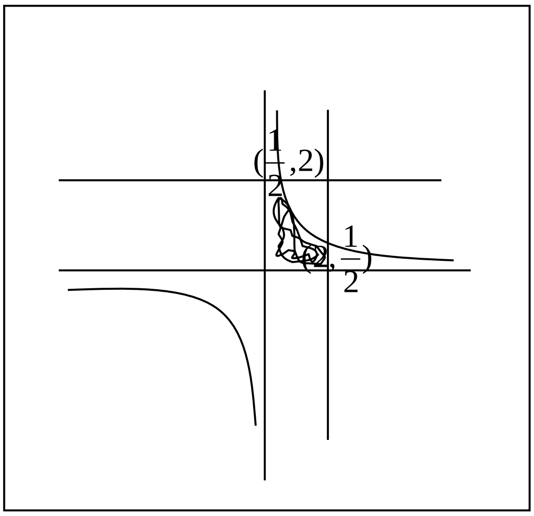
$$= \frac{1}{2}\int_2^6 \left(-3x^3+24x^2-36x\right)dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{3x^4}{4}+8x^3-18x^2\right]_2^6 = \frac{108-(-20)}{2} = 64$$

2.4 $\iint_D (1+x^2-y^2)dxdy$ כאשר D הוא התחום המוגבל ע"י הגרפים של $y=\frac{1}{x}$, $x=2$, $y=2$ והצירים.
פתרון:
נצייר את התחום המתואר:
נמצא נקודות חיתוך של הגרפים המתוארים.
(ברור כי נקודת החיתוך של $x=2$, $y=2$ היא $(2,2)$).

$$\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ x=2 \end{cases}$$

$$(\frac{1}{2},2) \qquad (2,\frac{1}{2})$$

לכן, הגרף נראה כך:



על מנת לעבור על התחום המקושקש, רצים על x מ 0 ל 2 בחלקים.

עבור $0 \le x \le \frac{1}{2}$, $0 \le y \le 2$

עבור $\frac{1}{2} \le x \le 2$, $0 \le y \le \frac{1}{x}$.

לכן,

$$\iint_D (1+x^2-y^2)dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^2 (1+x^2-y^2)dydx + \int_{\frac{1}{2}}^2\int_0^{\frac{1}{x}}(1+x^2-y^2)dydx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}}\left[y+x^2y-\frac{y^3}{3}\right]_0^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^2\left[y+x^2y-\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{x}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(2+2x^2-\frac{8}{3}\right)dx + \int_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{1}{x}+x-\frac{1}{3x^3}\right)dx =$$

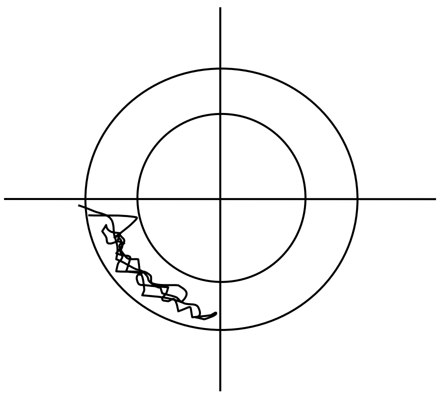
$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2x^2-\frac{2}{3}\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{1}{x}+x-\frac{1}{3}x^{-3}\right)dx = \left[\frac{2x^3}{3}-\frac{2}{3}x\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\ln|x|+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}x^{-2}\right]_{\frac{1}{2}}^2 =$$

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{3}+\ln 2+2+\frac{1}{24}-\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}+\ln\frac{2}{\frac{1}{2}}=1+\ln 4$$

3. (תזכורת) חשבו את האינטגרלים הבאים:

3.1 $\iint_D xydxdy$ כאשר D הוא התחום ברביע השלישי בו $4 \le x^2+y^2 \le 25$.

פתרון: נצייר את התחום המתואר:



נשתמש בקואורדינטות פולריות $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

התחום המתואר בקואורדינטות פולריות הוא: $\begin{cases} 2 \le r \le 5 \\ \pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ לכן:

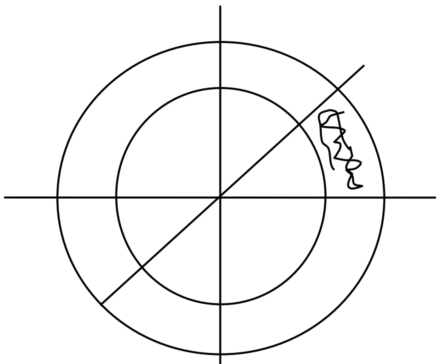
$$\iint_R xydxdy = \int_2^5 \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} r\cos\theta \cdot r\sin\theta \cdot rd\theta dr = \int_2^5 \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} r^3 \cos\theta \sin\theta d\theta dr =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta \sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta \\ 2\sin^2\theta = 1-\cos 2\theta \end{bmatrix} = \int_2^5 \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{2} r^3 \sin 2\theta d\theta dr = \int_2^5 \left[-\frac{1}{4} r^3 \cos 2\theta \right]_\pi^{\frac{3\pi}{2}} dr = \int_2^5 \left(\frac{1}{4} r^3 + \frac{1}{4} r^3 \right) dr$$

$$= \int_2^5 \left(\frac{1}{2} r^3 \right) dr = \left[\frac{r^4}{8} \right]_2^5 = \frac{5^4}{8} - \frac{2^4}{8} = 76.125$$

3.2. $\iint_D \frac{y}{x} dxdy$ כאשר D הוא התחום ברביע הראשון הכלוא בין גרף הפונקציה $y = x$ לבין ציר ה x בין המעגלים $x^2 + y^2 = 4$ ו $x^2 + y^2 = 1$.

פתרון: נצייר את התחום המתואר:



נשתמש בקואורדינטות פולריות $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

התחום המתואר בקואורדינטות פולריות הוא: $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$ לכן:

$$\iint_R \frac{y}{x}dxdy = \int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} rd\theta dr = \int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} rd\theta dr = \begin{bmatrix} t=\cos\theta \\ dt = -\sin\theta \\ 1 \le t \le \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$$

$$\int_1^2\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{-rdt}{t}dr = \int_1^2 [-r\ln|t|]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dr = \int_1^2 \left(-r\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dr = \int_1^2 \left(r\ln\sqrt{2}\right)dr =$$

$$\ln\sqrt{2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 = \ln\sqrt{2}(2-0.5) = \frac{3\ln\sqrt{2}}{2} = \frac{3\ln 2}{4}$$

4. ענו על הסעיפים הבאים:

4.1 חשבו $\iint_D x^2dxdy$ כאשר D הוא התחום המוגדר ע"י $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1$.

פתרון:

נשים לב התחום המתואר הוא: $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2 \le 1$.

נשתמש בהחלפת המשתנים, $\begin{cases} u=\frac{x}{2} \Leftrightarrow x=2u \\ v=\frac{y}{3} \Leftrightarrow y=3v \end{cases}$

בקואורדינטות u,v התחום המתואר הוא $u^2+v^2\le 1$.

היעקוביאן של החלפת המשתנים הוא: $J_F = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$ וערכו המוחלט: 6.

לכן,

$$\iint_D x^2dxdy = \iint_{u^2+v^2\le 1} (2u)^2 6dudv$$

ע"י מעבר לקואורדינטות פולריות:

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases}$$

התחום המתואר הוא: $\begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$ לכן:

$$\iint_D x^2dxdy = \iint_{u^2+v^2\le 1}(2u)^2 6dudv = \iint_{u^2+v^2\le 1} 24u^2dudv = \int_0^1\int_0^{2\pi} 24r^2\cos^2\theta\cdot rd\theta dr =$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} 24r^3\cos^2\theta d\theta dr = \begin{bmatrix}\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1\\ \cos^2\theta = \dfrac{\cos 2\theta + 1}{2}\end{bmatrix} = \int_0^1\int_0^{2\pi} 12r^3(\cos 2\theta + 1)d\theta dr =$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(12r^3\cos 2\theta + 12r^3)d\theta dr = \int_0^1\left[6r^3\sin 2\theta + 12r^3\theta\right]_0^{2\pi}dr = \int_0^1 24\pi r^3 dr = \left[6\pi r^4\right]_0^1 = 6\pi$$

4.2. חשבו $\iint_D (x+2y)dxdy$ כאשר D הוא התחום $(2x+3y-1)^2+(3x+4y)^2\le 16$.

פתרון:

נשתמש בהחלפת המשתנים, $\begin{cases}u = 2x+3y-1\\ v = 3x+4y\end{cases}$.

נמצא את x,y כפונקציות של u,v (באמצעות בידוד של x,y מהמשוואות הקודמות).

$$\begin{cases}u = 2x+3y-1/3\\ v = 3x+4y/2\end{cases}$$

$$-\begin{cases}3u = 6x+9y-3\\ 2v = 6x+8y\end{cases}$$

$$3u-2v = y-3$$

$$y = 3u-2v+3$$

$$I)u = 2x+3(3u-2v+3)-1$$

$$u = 2x+9u-6v+8$$

$$2x = -8u+6v-8$$

$$x = -4u+3v-4$$

כלומר,

$$\begin{cases}x = -4u+3v-4\\ y = 3u-2v+3\end{cases}$$

בקואורדינטות u,v התחום המתואר הוא $u^2+v^2\le 16$.

היעקוביאן של החלפת המשתנים הוא: $J_F = \begin{vmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix} = 8-9 = -1$ וערכו המוחלט: 1.

(שימו לב כי על מנת לחשב את היעקוביאן יכולנו להסתפק בהגדרה של u,v כפונקציות של x,y , שכן $J_F = \left(J_{F^{-1}}\right)^{-1} = \begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}^{-1} = (8-9)^{-1} = -1$)

לכן,

$$\iint_D (x+2y)dxdy = \iint_{u^2+v^2\le 16} \big((-4u+3v-4)+2(3u-2v+3)\big)\cdot 1dudv = \iint_{u^2+v^2\le 16} (2u-v+2)dudv$$

ע"י מעבר לקואורדינטות פולריות:

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases}$$

התחום המתואר הוא: $\begin{cases} 0 \le r \le 4 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$ לכן:

$$\iint_D (x+2y)dxdy = \iint_{u^2+v^2\le 16} (2u-v+2)dudv = \int_0^4\int_0^{2\pi} (24r\cos\theta - r\sin\theta + 2)\cdot rd\theta dr =$$

$$\int_0^4\int_0^{2\pi} (24r^2\cos\theta - r^2\sin\theta + 2r)d\theta dr = \int_0^4 \left[24r^2\sin\theta + r^2\cos\theta + 2r\theta\right]_0^{2\pi} dr =$$

$$\int_0^4 \left(r^2 + 4\pi r - r^2\right)dr = \int_0^4 4\pi r dr = \left[2\pi r^2\right]_0^4 = 32\pi$$

4.3. חשבו (באמצעות החלפת משתנים) את שטח המקבילית המוגדרת ע"י:

$$\begin{cases} -2 \le x+y \le 2 \\ -1 \le x+2y \le 1 \end{cases}.$$

פתרון: עלינו לחשב את $\iint_D 1dxdy$ כאשר D הוא התחום הכלוא במקבילית המתוארת.

נשתמש בהחלפת המשתנים:

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x+2y \end{cases}$$

בקואורדינטות u,v התחום המתואר הוא המלבן $\begin{cases} -2 \le u \le 2 \\ -1 \le v \le 1 \end{cases}.$

היעקוביאן של החלפת המשתנים הוא: $J_F = \left(J_{F^{-1}}\right)^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^{-1} = (2-1)^{-1} = \frac{1}{1} = 1$

וערכו המוחלט: 1.

לכן,

$$\iint_D 1dxdy = \int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1} 1dvdu = \int_{-2}^{2} 2du = 2(4) = 8$$

בהצלחה! ☺