פתרון תרגיל בית מספר 10 112

פתרון שאלה 1

מצא את הקואורדינטות של הוקטור $v = (4,-3,2)$ לפי הבסיס:

$B = \{(1,0,0); (1,1,0); (1,1,1)\}$

פתרון:

צריך למצוא סקלרים x,y,z המקיימים:

$v = (4,-3,2) = x(1,0,0) + y(1,1,0) + z(1,1,1)$

$(4,-3,2) = (x+y+z, y+z, z) \Rightarrow z = 2\,; y = -5\,; x = 7$

מכאן שההצגה הוקטורית של v לפי הבסיס B היא $[v]_B = (7,-5,2)$

פתרון שאלה 2

פתרון:

צריך למצוא סקלרים x,y,z,w המקיימים:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z+w & x-y-z \\ x+y & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x+z+w=2 \\ x-y-z=3 \\ x+y=4 \\ x=-7 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=-7 \\ y=11 \\ z=-21 \\ w=30 \end{matrix}$$

פתרון שאלה 3

יהי V מרחב וקטורי של פולינומים ממעלה קטנה או שווה 2.

$V = \{ax^2 + bx + c: \quad a,b,c \in R\}$

מצא את הקואורדינטות של הפולינום $v = 4t^2 - 3t + 2$ לפי הבסיס הנוצר ע"י הוקטורים הבאים:

$v_1 = 1 + t + t^2$

$v_2 = 1 + 2t + 3t^2$

$v_3 = 2 - t + t^2$

פתרון:

צריך למצוא סקלרים x,y,z המקיימים:

$v = 2t^2 - 3t + 4 = x(1+t+t^2) + y(1+2t+3t^2) + z(2-t+t^2)$

$= (x+3y+z)t^2 + (x+2y-z)t + (x+y+2z)$

$$\begin{matrix} x+3y+z=2 \\ x+2y-z=-3 \\ x+y+2z=4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=131/16 \\ y=-85/16 \\ z=9/16 \end{matrix}$$

מכאן שההצגה הוקטורית של v לפי הבסיס B היא: $[v]_B = (131/16, -85/16, 9/16)$

פתרון שאלה מספר 4

פתרון שאלה מס' 4

א.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

$\ker T = \left\{ x \mid : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} [X] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$

$\ker T = \left\{ x \mid [x] \in \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \right\} \Rightarrow$

$\dim \ker T = 2$

ב.

$\operatorname{Im} T = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) =$

$\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T = 2$

ג.

$\dim(\ker) + \dim(\operatorname{Im}) \stackrel{?}{=} \dim(V)$

$2 + 2 = 4$

כן מתקיים.

פתרון שאלה 5

האם קיימת העתקה לינארית $L : R^2 \to R^3$ כך ש-

$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$?

<u>תשובה</u>:

<u>דרך א':</u>

הוקטורים $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ מהווים בסיס ל R^2 ולכן קיימים $a,b\in R$, כך ש

$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. חשבו ומצאו כי $a=b=\frac{1}{2}$.

יש העתקה לינארית המקיימת את שלושת התנאים הנתונים אם ורק אם

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}L\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)+\frac{1}{2}L\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right).$$

אבל

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \qquad \frac{1}{2}L\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)+\frac{1}{2}L\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

כלומר $L\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)\neq\frac{1}{2}L\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)+\frac{1}{2}L\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$ ולכן אין העתקה לינארית המקיימת את התנאים הנתונים.

<u>דרך ב':</u>

נשים לב כי שלושת הוקטורים $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ בת"ל (בדקו!) ונמצאים ב $\operatorname{Im}L$ ולכן $\dim\operatorname{Im}L\geq 3$ ומכך ש $\operatorname{Im}L\subseteq R^3$ נובע ש $\dim\operatorname{Im}L=3$.

אבל עבור כל העתקה ליניארית $L:V\to W$ מתקיים:

$\dim V=\dim(\operatorname{Im}L)+\dim(Ker\,L)$. נציב את הנתונים כאן ונקבל

$2=3+\underbrace{\dim(Ker\,L)}_{\geq 0}$ סתירה.

לסיכום : אין העתקה לינארית המקיימת את התנאים הנתונים.

1. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות :

א. $\begin{pmatrix}3 & -2\\4 & 5\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 5\end{vmatrix} = 15-(-8) = 23$$

ב. $\begin{pmatrix}a-b & a\\ a & a+b\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}a-b & a\\ a & a+b\end{vmatrix} = (a-b)(a+b)-a^2 = -b^2$$

ג. $\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & -1 & 6\\ -1 & 5 & 1\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & -1 & 6\\ -1 & 5 & 1\end{vmatrix} \overset{\substack{R_2\to R_2-3R_1\\ R_3\to R_3+R_1}}{=} \begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & -10 & -6\\ 0 & 8 & 5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-10 & -6\\ 8 & 5\end{vmatrix} = -50+48 = -2$$

.2

א. $\begin{vmatrix}k & k\\ 4 & 2k\end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix}k & k\\ 4 & 2k\end{vmatrix} = 2k^2-4k = 0 \Rightarrow k = 0,2$$

ב. $\begin{vmatrix}k & 5\\ 4 & 2k\end{vmatrix} = 12$

$$\begin{vmatrix}k & 5\\ 4 & 2k\end{vmatrix} = 2k^2-20 = 12 \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow k = \pm 4$$

ג. . $\begin{vmatrix}2 & k-2 & 4\\ 3 & k-1 & 6\\ -1 & -1 & -2\end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix}2 & k-2 & 4\\ 3 & k-1 & 6\\ -1 & -1 & -2\end{vmatrix} \overset{\substack{C_2\to C_2-C_1\\ C_3\to C_3-2C_1}}{=} \begin{vmatrix}2 & k-4 & 0\\ 3 & k-4 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix} = 0$$

לכל ערך של הפרמטר k

$$\begin{vmatrix} 1 & k & k & k \\ k & 1 & k & k \\ k & k & 1 & k \\ k & k & k & 1 \end{vmatrix} = 0$$.ד

$$\begin{vmatrix} 1 & k & k & k \\ k & 1 & k & k \\ k & k & 1 & k \\ k & k & k & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1 \to R_1+R_2+R_3+R_4}{=} \begin{vmatrix} 1+3k & 1+3k & 1+3k & 1+3k \\ k & 1 & k & k \\ k & k & 1 & k \\ k & k & k & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(1+3k)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & k & k \\ k & k & 1 & k \\ k & k & k & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - kR_1 \\ R_3 \to R_3 - kR_1 \\ R_4 \to R_4 - kR_1}}{=} (1+3k)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \end{vmatrix} =$$

$$(1+3k)(1-k)^3 = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}, 1$$