תרגיל 8

20 בדצמבר 2015

1. א. תהיינה $f : A \to B, g : B \to C$ פונקציות כך שההרכבה $g \circ f$ על. הוכח או הפרך:
   g על.
   f על.

   ב. היעזר בשאלה זו, ובמה שעשינו בכיתה בדומה לזה לגבי חד־חד־ערכיות, והראה שאם פונקציה $f : A \to B$ היא הפיכה אז היא חח"ע ועל.

   ג. תהי $f : A \to B$ פונקציה חח"ע ועל. הוכח שהיא הפיכה (רמז: בנה לה את הפונקציה ההופכית)

   ד. הערה: בזאת הוכחנו כי פונקציה היא הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל.

<u>פתרון:</u>

א. נראה ש־g על: יהי $c \in C$, $g \circ f$ על ולכן קיים $a \in A$ כך ש ־ $g(f(a)) = g \circ f(a) = c$, והמקור של c תחת g הוא $f(a)$.

f לא בהכרח על, למשל: נגדיר $A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{1\}$ ונגדיר שתי פונקציות $f : A \to B, g : B \to C$ ע"י: $f(1) = 1, g(1) = g(2) = 1$. ב־$C$ יש רק איבר אחד שמקורו 1, אבל f לא על.

ב. אם f הפיכה אז קיימת $g : B \to A$ כך ש־ $g \circ f = Id_A, f \circ g = Id_B$, כאשר פונקציות הזהות הן תמיד חח"ע ועל. כעת, ממה שעשינו בכיתה, ומהעובדה ש־$f \circ g$ על נובע ש־f על, ומסעיף א ומהעובדה ש־$g \circ f$ חח"ע נובע ש־f חח"ע.

ג. נגדיר $g : B \to A$ באופן הבא: לכל $b \in B$ קיים, מהעובדה ש־f על מקור $a \in A$ כך ש־$f(a) = b$. נגדיר $g(b) = a$. הפונקציה חד ערכית מכיוון שיש רק מקור אחד, כי f חח"ע.

2. תהי $f : X \to Y$ פונקציה ו־$B \subseteq Y$.
   א. הוכח כי: $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, ושיש שיוויון אם f על.
   ב. מצא דוגמא לפונקציה כנ"ל כך שההכלה היא הכלה ממש.

<u>פתרון:</u>

א. יהי $y \in f(f^{-1}(B))$ אזי קיים $x \in f^{-1}(B)$ כך ש־$f(x) = y$. כיון ש־x הוא מקבוצת המקורות של B ובנוסף הוא המקור של y זאת אומרת ש־ $y \in B$)הוא לא יכול להיות מקור של איבר נוסף כי הפונקציה חד ערכית.

כעת, נניח ש־f על, ונותר להוכיח רק את הכיוון השני, כלומר ש־$B \subseteq f(f^{-1}(B))$. יהי $b \in B$. כיון ש־f על, זאת אומרת שקיים $x \in X$ כך ש־$f(x) = b$ ולכן $x \in f^{-1}(B)$, ולכן $b = f(x) \in f(f^{-1}(B))$.

ב. $X = Y = \{1,2\}, B = \{1,2\}$ ונגדיר $f(1) = f(2) = 1$ אזי $f^{-1}(B)) = \{1,2\}$ ו־$f(\{1,2\}) = \{1\} \subset \{1,2\} = B$.

3. תהי $f : A \longrightarrow B$, $|A| = |B| = n$ הוכח f חח"ע אמ"מ f על.

פתרון:

נסמן: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$.

$\Leftarrow$

צ"ל: $f(A) = B$.

הוכחה:

f חח"ע ולכן $|\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)\}| = n$ אולם $\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)\} \subseteq B$ ובשניהם יש אותו מספר איברים לכן בהכרח $B = \{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)\}$.

$\Rightarrow$

צ"ל כי: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$:

f על ולכן $|\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)\}| = |B| = n$ ולכן בהכרח לכל $a_1 \neq a_2$ בהכרח $f(a_1) \neq f(a_2)$)אחרת $|\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)\}| < n$(.

4. תהיינה A, Bקבוצות לא ריקות. הוכיחו כי קיימת פונקציה חח"ע $f : A \to A \times B$.

פתרון:

נבחר $b \in B$)קיים כזה כי $B \neq \phi$(, ונגדיר את הפונקציה ע"י: $f(a) = (a, b)$.

5. האם הפונקציות הבאות הן חח"ע? על?

א. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f(n) = |n|$.

ב. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^3$.

ג. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(q) = e^q$.

ד. תהי A קבוצה ו־$f : P(A) \to P(A)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(B) = A \setminus B$.

ה. תהי A קבוצה, $B \subset A$)מוכל ממש(תת קבוצה, ו־$f : P(A) \to P(B)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(C) = C \cap B$

ו. תהי A קבוצה, $B \subset A$)מוכל ממש(תת קבוצה, ו־$f : P(B) \to P(A)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(C) = C \cup (A \setminus B)$.

פתרון:

א. על (כל איב רטבעי הוא המקור של עצמו). לא חח"ע כי $f(1) = f(-1)$.

ב. חח"ע ועל (תתבוננו בגרף של הפונקציה ותבינו).

ג. חח"ע כי אם $e^{q_1} = e^{q_2}$ אז $q_1 = q_2$. לא על כי למשל ל-$e^{\sqrt{2}}$ אין מקור כי $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

ד. נתייחס ל-A כקבוצה האוניברסלית לתרגיל זה. חח"ע: אם $C \neq D$ אז באחת הקבוצות יש איבר שאין בשניה. נניח לצורך העניין (קוראים לזה "בלי הגבלת הכלליות" וכותבים בה"כ) שקיים $x \in C \setminus D$ ולכן $x \in D^c \setminus C^c$ ולכן $C^c \neq D^c$, וזאת אומרת ש-f חח"ע. על: תהי $B \in P(A)$, אזי $f(B^c) = B$ ומצאנו מקור, ולכן היא גם על.

ה. חח"ע: לא, כי $f(A) = f(B) = B$. על: כן: לכל $C \in P(B)$ היא המקור של עצמה (כי $f(C) = C \cap B = C$).

ו. נתייחס ל-A כקבוצה האוניברסלית לתרגיל זה. חח"ע: כן: אם $C \neq D \in P(B)$, אז בה"כ קיים $x \in C \setminus D$ ולכן $x \in (C \cup B^c) \setminus (D \cup B^c)$ ולכן $x \in f(C) \setminus f(D)$ ולכן $f(C) \neq f(D)$ ולכן f חח"ע. על: לאו דוקא, אם ב-B^c יש לפחות שני איברים, נסמנם x, y, אזי ל-$\{x\}$ אין מקור.

6. תהי $f : X \to Y$ פונקציה ותהיינה תתי הקבוצות $A_1, A_2 \subseteq X, B_1, B_2 \subseteq Y$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   א. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
   ב. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f(B_2)$.
   ג. $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
   ד. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
   ה. $f^{-1}(B_1^c) = (f^{-1}(B_1))^c$.
   ו. $f(A_1^c) = (f(A_1))^c$.
   ז. $f(A_1 \triangle A_2) = f(A_1) \triangle f(A_2)$.
   ח. $f^{-1}(B_1 \triangle B_2) = f^{-1}(B_1) \triangle f^{-1}(B_2)$.

<u>פתרון:</u>

א. הוכחה: $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \iff f(x) \in B_1 \cap B_2 \iff f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \iff x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \iff x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

ב. הוכחה: $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \iff f(x) \in B_1 \cup B_2 \iff f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2 \iff x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2) \iff x \in f^{-1}(B_1) \vee f^{-1}(B_2)$.

ג. הפרכה: $X = Y = \{1, 2\}$ ו-$f(1) = f(2) = 1$ ונתבונן ב-$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}$. כיוון ש- $A_1 \cap A_2 = \phi$ נובע ש- $f(A_1 \cap A_2) = f(\phi) = \phi$. אבל $f(A_1) = f(A_2) = \{1\}$ ולכן $f(A_1) \cap f(A_2) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\} \neq \phi$.

ד. הוכחה: כיוון ראשון ($\subseteq$): יהי $y \in f(A_1 \cup A_2)$ אזי קיים $a \in A_1 \cup A_2$ כך ש-$f(a) = y$. אם $a \in A_1$ אז $y \in f(A_1)$, אחרת $a \in A_2$ ואז $y \in f(A_2)$, ובסה"כ $y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2)$ ולכן $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

כיוון שני ($\supseteq$): יהי $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. אם $y \in f(A_1)$ אז קיים $a \in A_1$ כך ש־$f(a) = y$ אבל $A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$ ולכן $a \in A_1 \cup A_2$ והוא מקיים $f(a) = y$ ולכן $y \in f(A_1 \cup A_2)$. אחרת קיים $a \in A_2$ כך ש־$f(a) = y$ ונעשה אותו דבר.

ה. הוכחה: $x \notin f^{-1}(B_1) \iff f(x) \notin B_1 \iff f(x) \in B_1^c \iff x \in f^{-1}(B_1^c)$ $\iff x \in (f^{-1}(B_1))^c$.

ו. הפרכה: $X = Y = \{1,2\}$ ו־$f(1) = f(2) = 1$ ונתבונן ב־$A_1 = \{1\}$. $A_1^c = \{2\}$ ולכן $f(A_1^c) = f(\{2\}) = \{1\}$. מצד שני $f(A_1) = \{1\}$ ולכן $(f(A_1))^c = \{2\} \neq \{1\}$.

ז. הפרכה: $X = Y = \{1,2\}$ ו־$f(1) = f(2) = 1$ ונתבונן ב־$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}$. כיוון ש־$A_1 \triangle A_2 = \{1,2\}$ אזי $f(A_1 \triangle A_2) = \{1\}$. מצד שני $f(A_1) = f(A_2) = \{1\}$ ולכן $f(A_1) \triangle f(A_2) = \phi \neq \{1\}$.

ח. הוכחה: $x \in f^{-1}(B_1 \triangle B_2) \iff f(x) \in B_1 \triangle B_2 \iff f(x) \in B_1 \setminus B_2 \vee f(x) \in B_2 \setminus B_1 \iff (x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \notin f^{-1}(B_2)) \vee (x \in f^{-1}(B_2) \wedge x \notin f^{-1}(B_1)) \iff x \in f^{-1}(B_2) \triangle f^{-1}(B_2)$.

7. שאלה ממבחן: תהי X קבוצה, $f : X \to X$ פונקציה, ותהיינה $A, B \subseteq X$ הוכח או הפרך:

$$f(A \setminus B^c) = f(A) \setminus (f(B))^c$$

פתרון:

הפרכה: $X = Y = \{1,2\}$ ו־$f(1) = f(2) = 1$ ונתבונן ב־$A = \{1\}, B = \{2\}$ אזי $A \setminus B^c = A \cap (B^c)^c = A \cap B = \phi$ ולכן $f(A \setminus B^c) = \phi$. מצד שני $f(A) = \{1\}, f(B) = \{1\}, (f(B))^c = \{2\}$ ולכן $f(A) \setminus (f(B))^c = \{1\} \setminus \{2\} = \{1\} \neq \phi$.