

14.09.14

88-112 אלגברה לינארית 1 – קורס קיץ תשע"ד

דוגמא

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות:

- יש לענות על כל 6 השאלות. סה"כ הניקוד המקסימלי 110 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).
- יש לענות על **דפי הבחינה** בלבד. ניתן להשתמש במחברת כטיוטה, אך המחברת לא תיבדק כלל.
- **הוראות בפרט למבחן הדמה:**
 - מבחן הדמה **לא** מבטיח אילו נושאים וסוגי שאלות יופיעו במבחן
 - מבחן הדמה **כן** מעלה את סיכויי ההצלחה למי שיפתור אותו ברצינות (שלוש שעות, ללא חומר עזר).

חלק א'

1. (20 נק') הוכיחו את המשפט הבא:
(משפט כלשהו מרשימת המשפטים)

2. (15 נק') יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית, ותהיינה $T, S : V \rightarrow W$ העתקות לינאריות.

א. הוכיחו/הפריכו: אם $\text{Im}(T + S) \subseteq \text{Im}(T)$ אז $\text{Im}(S) \subseteq \text{Im}(T)$

ב. הוכיחו/הפריכו: אם $\text{ker}(T + S) \subseteq \text{ker}(T)$ אז $\text{ker}(S) \subseteq \text{ker}(T)$

3. (15 נק') תהינה מטריצות ריבועיות $A \in F^{n \times n}$

א. נניח $AB = 0$ הוכיחו כי $C(B) \subseteq N(A)$

ב. נניח כי $A^2 = 0$ הוכיחו כי $\text{rank}(A) \leq \frac{n}{2}$

4. (20 נק') נתונים וקטורים

$$w_1 = (1, 1, 2)$$

$$v_1 = (1, 2, 1)$$

$$w_2 = (2, 1, 1)$$

$$v_2 = (1, 1, 2)$$

$$w_3 = (1, 2, a)$$

$$v_3 = (2, a, 1)$$

א. מצאו לאילו ערכי a קיימת העתקה לינארית T המקיימת

$$Tv_1 = w_1$$

$$Tv_2 = w_2$$

$$Tv_3 = w_3$$

ב. עבור $a = 1$ מצאו את העתקה מסעיף א' במפורש (כלומר מצאו נוסחא

$$(T(x, y, z) = \dots$$

ג. מצאו את ההעתקה ההופכית להעתקה מסעיף ב'

5. (20 נק') יהי $U = \text{span}\{1+x+x^3, x^2-1, 1+x+x^2\}$ ויהי

$$W = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = p(2)\}$$

א. מצאו בסיס ומימד עבור $U \cap W$

ב. מצאו בסיס ומימד עבור $U + W$

6. (20 נק')

א. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. מצאו מטריצה B עבורה $AB = BA = 0$

ב. תהי ההעתקה $T(x, y, z, w) = (x + y, w, 0, z)$

חשבו את המטריצה המייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי של T^n , לכל $n \in \mathbb{N}$.