

אנליזה 1 למורים - תרגיל 5שאלה 1

הסדרה $\{a_n\}$ מוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n^2 \end{cases}$$

- א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים $0 < a_n < 1$
 ב. הוכיחו כי $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת
 ג. הסיקו ש- $\{a_n\}$ מתכנסת ומצאו את הגבול שלה.

פתרון

- א. נוכיח באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ $0 < a_n < 1$
 1. בדיקה: $n=1$: $a_1 = \frac{1}{4}$ ולכן מתקיים: $0 < a_1 < 1$
 2. הנחה: נניח כי עבור n מסוים מתקיים: $0 < a_n < 1$
 3. צריך להוכיח: $0 < a_{n+1} < 1$.
 הוכחה: לפי נוסחת הנסיגה מתקיים: $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n^2$.
 מהנחת האינדוקציה: $0 < a_n < 1$ ולכן $0 < a_n^2 < 1$.
 אם נכפיל את שני האגפים בחצי נקבל: $0 < \frac{1}{2} \cdot a_n^2 < \frac{1}{2}$.
 ולכן בפרט מתקיים: $0 < \frac{1}{2} \cdot a_n^2 < 1$ כלומר $0 < a_{n+1} < 1$ כנדרש.

ב. נוכיח כי הסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת בעזרת אינדוקציה:

1. בדיקה: $n=1$: $a_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{32} < \frac{1}{4} = a_1$
 2. הנחה: נניח כי עבור n מסוים מתקיים: $a_n > a_{n+1}$
 3. צריך להוכיח: $a_{n+1} > a_{n+2}$
 הוכחה: $a_{n+2} = \frac{1}{2} \cdot a_{n+1}^2 \stackrel{(1)}{<} \frac{1}{2} \cdot a_n^2 = a_{n+1}$
 הסבר המעבר (1): $a_{n+1} < a_n \Rightarrow a_{n+1}^2 < a_n^2$
 ולכן לפי האינדוקציה נסיק כי $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת.

ג. לפי משפט, $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת וחסומה ולכן מתכנסת. נמצא את הגבול שלה:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot a_{n-1}^2 = \frac{1}{2} \cdot L^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \cdot L^2 \Rightarrow 0 = L(1 - 0.5L)$$

ולכן $L=0$ או $L=2$. אבל $0 < a_n < 1$ לכל n ולכן $0 \leq L \leq 1$ ולכן נקבל כי: $L=0$

שאלה 2

הסדרה $\{a_n\}$ מוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{3} \\ a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} \end{cases}$$

- א. הוכיחו כי $\{a_n\}$ מונוטונית עולה.
 ב. הסיקו ש- $\{a_n\}$ מתכנסת ומצאו את הגבול שלה.

פתרון

- א. נוכיח ע"י אינדוקציה.
 בדיקה: עבור $n=1$:

$$a_2 = \sqrt{3 + a_1} = \sqrt{3 + \sqrt{3}} > \sqrt{3} = a_1$$

הנחה: נניח כי עבורו n מסויים: $a_{n+1} > a_n$
 נוכיח כי זה מתקיים עבורו $n+1$ כלומר ש: $a_{n+2} > a_{n+1}$
 הוכחה: $a_{n+2} = \sqrt{3 + a_{n+1}} > \sqrt{3 + a_n} = a_{n+1}$
 ולכן a_n מונוטונית עולה.

- ב. a_n חסומה מלמטה ע"י $\sqrt{3}$.
 נוכיח שהיא חסומה מלמעלה ע"י 3 ע"י אינדוקציה.
 בדיקה: עבור $n=1$:

$$a_1 = \sqrt{3} < 3$$

הנחה: נניח כי עבורו n מסויים: $3 > a_n$
 נוכיח כי זה מתקיים עבורו $n+1$ כלומר ש: $3 > a_{n+1}$
 הוכחה: $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} > 3$
 ולכן a_n חסומה מלמעלה ולמטה ולכן חסומה.
 קיבלנו ש a_n חסומה ומונוטונית ולכן מתכנסת. נמצא את הגבול שלה:

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 + a_n} = \sqrt{3 + c}$$

ולכן: $c = \sqrt{3 + c}$
 $c^2 = 3 + c$

$$0 = c^2 - c - 3$$

$$c = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

הסדרה חיובית ולכן הגבול חיובי ולכן

$$c = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

שאלה 3

תשתמשו בנוסחה הבאה שראינו בשיעור ומצאו את הגבולות הבאים:

תהי סדרה ששואפת לאינסוף אזי: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

פתרון

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{7}{n}\right) = e^7 \cdot 1 = e^7 \quad .א$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1+2}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+1} + \frac{2}{n+1}\right)^{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\right]^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{-2} \quad .ב \\ &= (e^2)^2 \cdot 1^{-2} = e^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-2}{n^2-3}\right)^{4n^2-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3+1}{n^2-3}\right)^{4n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2-3}\right)^{4n^2-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2-3}\right)^{4n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2-3}\right)^{n^2-3}\right]^4 \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2-3}\right)^{11} \quad .ג \\ &= e^4 \cdot 1^{11} = e^4 \end{aligned}$$