שאלה 1:

יהי V מ"ו ממימד n, ויהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס סדור למרחב.

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה הוכיחו/הפריכו: קיים בסיס סדור $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ כך ש

$$[I]_C^B = A$$

פתרון:

אם כן, בואו נבין מי היא מטריצה המעבר בין הבסיסים:

$$[I]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_C & \cdots & [v_n]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$$

רוצים שזה יהיה שווה למטריצה A, כלומר לכלל $1 \le i \le n$ יתקיים כי

$$[v_i]_C = C_i(A) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

זה נכון אם ורק אם

$$v_i = a_{1i}w_1 + \cdots + a_{ni}w_n$$

שינוי כיוון קל:

$$[I]_C^B = A$$

אם ורק אם

$$[I]_B^C = A^{-1}$$

נסמן לצורך הנוחות $D = A^{-1}$ ובעזרת אותו טיעון בדיוק נקבל כי

$$w_i = d_{1i}v_1 + \cdots d_{ni}v_n$$

כלומר מצאנו ממש וקטורים $\{w_1, \dots, w_n\}$ כך ש

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ [w_1]_B & \cdots & [w_n]_B \\ | & & | \end{pmatrix} = D = A^{-1}$$

צ"ל ש $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ בסיס, מספיק להוכיח שהיא בת"ל לפי השלישי חינם (יש בה n וקטורים)

כיוון שA^{-1} הפיכה עמודותיה בת"ל, והקואורדינטות בת"ל אם"ם הוקטורים בת"ל.

שאלה 2:

תהי A מטריצה ריבועית וסימטרית. הוכיחו כי $adj(A)$ סימטרית.

מופיע בהרצאה 13 של ארז שיינר.

<u>שאלה 3</u>:

הוכיחו/הפריכו:

$$rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$$

ננסה להוכיח:

$$\dim C(A+B) \leq \dim C(A) + \dim C(B)$$

$$C(A+B) \subseteq C(A) + C(B)$$

$$C(A+B) = span\{C_1(A+B), \dots, C_n(A+B)\} = span\{C_1(A) + C_1(B), \dots, C_n(A) + C_n(B)\}$$
$$\subseteq span\{C_1(A), C_1(B), \dots, C_n(A), C_n(B)\} = C(A) + C(B)$$

דוגמא:

$$A = I$$

$$B = -I$$

$$C(A+B) = C(0) = \{0\}$$

$$C(A) = C(B) = \mathbb{F}^n$$

כעת נובע כי

$$\dim\big(C(A+B)\big) \leq \dim\big(C(A) + C(B)\big) = \dim C(A) + \dim C(B) - \dim\big(C(A) \cap C(B)\big) \leq \dim C(A) + \dim C(B)$$

<u>שאלה 4</u>

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה הוכיחו כי קיימת $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $rank(B) = 1$ וגם $|A+B| = 1$

כלומר, צ"ל מטריצה B שכל שורותיה הן מכפלות של אותה שורה בסקלר (ולא שורת האפס), או אותו דבר על העמודות.

כמו כן צריך ש $A+B$ תהא הפיכה. וגם הדטרמיננטה תהא בדיוק 1.

רעיון:

נתון שA הפיכה ולכן

$$|A| \neq 0$$

נביט במטריצה B שהיא

$$B = \begin{pmatrix} -aR_1(A)- \\ -0- \\ \vdots \\ -0- \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} (1+a)R_1(A) \\ R_2(A) \\ \vdots \\ R_n(A) \end{pmatrix}$$

$$|A+B| = (1+a)|A| =?= 1$$

$$1+a = \frac{1}{|A|}$$

מותר לחלק בדטרמיננטה של A כי היא שונה מאפס.

$$a = \frac{1}{|A|} - 1$$

נשים לב שאם $a=0$ אזי $rank(B)=0$. מה נעשה במקרה זה?

במקרה זה

$$|A| = 1$$

נבחר

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ R_1(A) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

אכן $rank(B) = 1$ וכמו כן

$$A+B = \begin{pmatrix} R_1(A) \\ R_2(A)+R_1(A) \\ R_3(A) \\ \vdots \\ R_n(A) \end{pmatrix}$$

כיוון שחיבור שורה אחת לשורה אחרת לא משפיע

$$|A+B| = |A| = 1$$

שאלה 5

הוכיחו/הפריכו:

אם בצורה המדורגת קנונית של מטריצה ריבועית יש יותר שורות אפסים מאשר שורות שאינן אפסים (במילים אחרות דרגת המטריצה קטנה מחצי מגודל המטריצה הריבועית), האם המטריצה בריבוע שווה אפס?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A = A$$

$$rank(A) = 1 < \frac{3}{2}$$

שאלה 6

תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ כך ש $|A| = 2$ צ"ל

$$|3AA^tA^{-1}adj(A)| = 3^3|A||A^t||A^{-1}||adj(A)| = 3^3|A||A^{-1}||A^t||adj(A)| = 3^3|A \cdot A^{-1}||A^t||adj(A)| =$$
$$= 3^3|I||A||A|^2 = 6^3$$

שאלה 7

יהי $T: V \to V$ אופרטור (העתקה לינארית ממרחב לעצמו). המקיים $T^2 = I$.

הוכיחו שאם

$$\ker(I - T) = Im(I + T)$$

אזי

$$\ker(I + T) = Im(I - T)$$

פתרון:

$$0 = I - T^2 = (I + T)(I - T)$$

זה נכון כיוון שI מתחלפת עם כל העתקה, ובפרט עם T, וכמובן שT מתחלפת עם עצמה.

כיוון שיש לנו הרכבה של שתי העתקות שנותנת את העתקת האפס אזי התמונה של ההעתקה הפנימית מוכלת בגרעין של ההעתקה החיצונית.

כלומר

$$Im(I - T) \subseteq \ker(I + T)$$

כמו כן נתון לנו

$$\ker(I - T) = Im(I + T)$$

לפי משפט הדרגה על ההעתקות $I + T, I - T$

$$\dim \ker\,(I - T) + \dim Im(I - T) = \dim V = \dim \ker\,(I + T) + \dim Im(I + T)$$

נעביר אגפים מהשיוויון בין שני הצדדים החיצוניים

$$\dim \ker(I - T) - \dim Im\,(I + T) = \dim \ker(I + T) - \dim Im(I - T)$$

לפי הנתון צד שמאל שווה 0, לכן גם צד ימין שווה אפס.

לכן לפי שיוויון מימדים והכלה חד כיוונית, משל.

שאלה 8

יהי אופרטור $T: V \to V$ נביט בקבוצה

$$U = \{S: V \to V | TS = ST\}$$

הוכיחו/הפריכו: זה תת מרחב של קבוצת כל האופרטורים מהמרחב V לעצמו.

הוכחה:

אכן $0 \in U$ כיוון ש

$$0T = 0 = T0$$

יהיו אופרטורים $S_1, S_2 \in U$ ויהי $a \in \mathbb{F}$ צ"ל

$$S_1 + aS_2 \in U$$

כלומר צ"ל:

$$T(S_1 + aS_2) = (S_1 + aS_2)T$$

אכן

$$T(S_1 + aS_2) = TS_1 + aTS_2 = S_1T + aS_2T = (S_1 + aS_2)T$$

שאלה 9

חלק א'

1. (30 נק') יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית, תהיינה $T,S: V \to V$ העתקות לינאריות (אופרטורים), נסמן את העתקת הזהות ב $I: V \to V$.
   א. הוכיחו/הפריכו: אם $(T+I)S = S$ אזי $\operatorname{Im}(S) \subseteq \ker(T)$.
   ב. הוכיחו/הפריכו: אם $TST = I$ אזי $TS = ST$.
   ג. מצאו העתקות הפיכות T,S כך ש $(T+S)^2 = 0$ וגם $TS = -ST$ או הוכיחו שלא קיימות כאלה.

סעיף א':

$$(T + I)S = TS + IS = TS + S$$

$$TS + S = S$$

$$TS = 0$$

ולכן, כמו בשאלה קודמת (7), נובע כי

$$Im(S) \subseteq \ker(T)$$

סעיף ב':

$$TST = I$$

העתקת הזהות חח"ע ועל, לכן הפנימית חח"ע והחיצונית על.

כלומר T שהיא גם החיצונית וגם הפנימית הפיכה!

כיוון שההופכית יחידה

$$T^{-1} = ST$$

מצד שני, גם

$$T^{-1} = TS$$

הרי

$$(TS)T = I$$

מ.ש.ל.

דרך שנייה להוכיח שT הפיכה (גם S על הדרך)

נעבור למטריצות מייצגות מבסיס כלשהו לעצמו

$$[TST] = [I]$$

לכן, וכיוון שהמטריצה המייצגת את העתקת הזהות מבסיס לעצמו היא מטריצת היחידה,

$$[T][S][T] = I$$

כיוון שמדובר באופרטורים המטריצות ריבועיות, וכיוון שמכפלתן הפיכה, כולן הפיכות, ולכן גם האופרטורים עצמם.

דרך 3:

$$ST = (TST)ST = TSTST = TS(TST) = TS$$

סעיף ג':

$$(T + S)^2 = 0$$

$$T^2 + TS + ST + S^2 = 0$$

אם יש העתקות כאלה שמקיימות את הדרוש

$$T^2 + S^2 = 0$$

נעבור למטריצות מייצגות

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [S] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

אכן שתי המטריצות הפיכות, וגם:

$$[T][S] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[S][T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -[T][S]$$

$$([T] + [S])^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

איך היינו חושבים על לבד?

אני הייתי הולך לפי בסיס. ניקח בסיס כלשהו $\{e_1, e_2\}$

$$Te_1 = e_2$$

$$Te_2 = e_1$$

$$Se_1 = e_2$$

$$Se_2 = -e_1$$

ולכן

$$TSe_1 = e_1, \qquad STe_1 = -e_1$$

<u>שאלה 10</u>

2. (10 נק') תהיינה $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות ריבועיות כך ש $AB = 0$ ו $BC - I = 0$

הוכיחו/הפריכו: $A = 0$.

$$AB = 0$$

$$ABC = 0$$

$$A = 0$$

4. (24 נק') נביט במרחב הוקטורי $V=\mathbb{R}^3$, ובבסיסים $B=\{(1,0,0),(0,1,2),(0,1,1)\}$,

$C=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$. יהי D בסיס נוסף כלשהו (לא נתון) ל V.

תהיינה העתקות לינאריות $T,S:V\to V$ כך שמתקיים:

$$[S]_C^D=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\ [T]_D^B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

א. מצאו בסיסים ומימדים ל $\ker T,\operatorname{Im}S$.

ב. האם אפשר בעזרת נתוני השאלה למצוא בסיס ל $\ker S$? אם כן מצאו אותו, אחרת הוכיחו שאי אפשר.

ג. האם אפשר בעזרת נתוני השאלה למצוא בסיס ל $\operatorname{Im}T$? אם כן מצאו אותו, אחרת הוכיחו שאי אפשר.

ד. מצאו נוסחה מפורשת עבור $S\left(T\left(x,y,z\right)\right)$.

סעיף א': ראשית המטריצה המייצגת את T (לא משנה לפי אילו בסיסים) היא הפיכה ולכן T הפיכה ולכן חח"ע ולכן הגרעין הוא רק מרחב האפס.

לכן מימד הגרעין הוא אפס, והבסיס הוא הקבוצה הריקה.

כעת, עמודות המטריצה $[S]_C^D$ הן $[Sd_i]_C$ כאשר $D=\{d_1,d_2,d_3\}$

לכן

$$[Sd_1]_C=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad [Sd_2]_C=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad [Sd_3]_C=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$Sd_1=(1,0,0)$$

$$Sd_2=1\cdot(1,0,0)+1\cdot(0,1,0)$$

$$Sd_3=-(0,1,0)$$

$$Im\ S=span\,\{Sd_1,Sd_2,Sd_3\}$$

כלומר מצאנו קבוצה פורשת.

נשים בעמודות, נדרג, נעיף את אלה שהמשתנים המתאימים להן תלויים ובקיצור נעיף את מי שתלוי לינארית

$$ImS=span\{(1,0,0),(1,1,0)\}$$

וכמובן שמימד התמונה הוא 2.

סעיף ב'

אמנם

$$Sd_1 - Sd_2 - Sd_3 = (0,0,0)$$

ולכן

$$S(d_1 - d_2 - d_3) = (0,0,0)$$

ולכן

$$d_1 - d_2 - d_3 \in \ker S$$

אבל! הבסיס D אינו נתון לנו.

ראינו ש$\dim ImS = 2$ ולכן $\dim \ker S = 1$ ולכן כיוון ש $d_1 - d_2 - d_3 \neq 0$ (הרי הם בת"ל)

נובע

$$\ker S = span\{d_1 - d_2 - d_3\}$$

לכן מספיק להראות שני בסיסים D עבורם $d_1 - d_2 - d_3$ יוצאים בת"ל וכך יוצא שהגרעין שונה וזה הוכחה שלא ניתן למצוא אותו.

$$D = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}, \quad d_1 - d_2 - d_3 = (1,-1,-1)$$

$$D = \{(1,0,0),(0,-1,0),(0,0,1)\}, \qquad d_1 - d_2 - d_3 = (1,1,-1)$$

סעיף ג'

ראינו כבר שT הפיכה, לכן היא על ולכן התמונה היא הטווח.

ניקח בסיס כלשהו לטווח והמימד הוא 3.

סעיף ד'

ראשית נבחין לב כי

$$[S]_C^D \cdot [T]_D^B = [ST]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן עוברים לצורה המפורשת.

https://youtu.be/ouEdwylqPiQ