הרצאה 7

הגדרה. R חוג חילופי. אידיאל $I \lhd R$ נקרא ראשוני אם לכל $a,b\in R$,
$ab\in I \Leftarrow a\in I$ או $b\in I$.

אינטואיציה. $R=\mathbb{Z}[i]$. יהי $I=(2)\lhd\mathbb{Z}[i]$. כלומר
$=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$

$$I=\{2\alpha,\ \alpha\in\mathbb{Z}[i]\}=\{a+bi \mid \underset{\text{זוגיים}}{a,b\in\mathbb{Z}}\}$$

I לא ראשוני כי $\underset{I}{\underset{\in}{2}}=(1+i)(1-i)$

עובדה. יהי p מספר ראשוני. אז האידיאל $p\mathbb{Z}[i]$ (האידיאל של $\mathbb{Z}[i]$ הנוצר ע"י p) הוא ראשוני אם ורק אם $p\equiv 3 \bmod 4$.

משפט (Fermat, 1640) יהי p מספר ראשוני. אז אי-אפשר להציג את p כסכום של שני ריבועים ($p\neq a^2+b^2$) אם ורק אם $p\equiv 3 \bmod 4$.

$$6=2\cdot 3=(-2)(-3)$$
$$6\mathbb{Z}=(2\mathbb{Z})\cdot(3\mathbb{Z})$$

אך $2\mathbb{Z}=(-2)\mathbb{Z}$ כי $2=(-1)\cdot(-2)$
$-2=(-1)\cdot(2)$

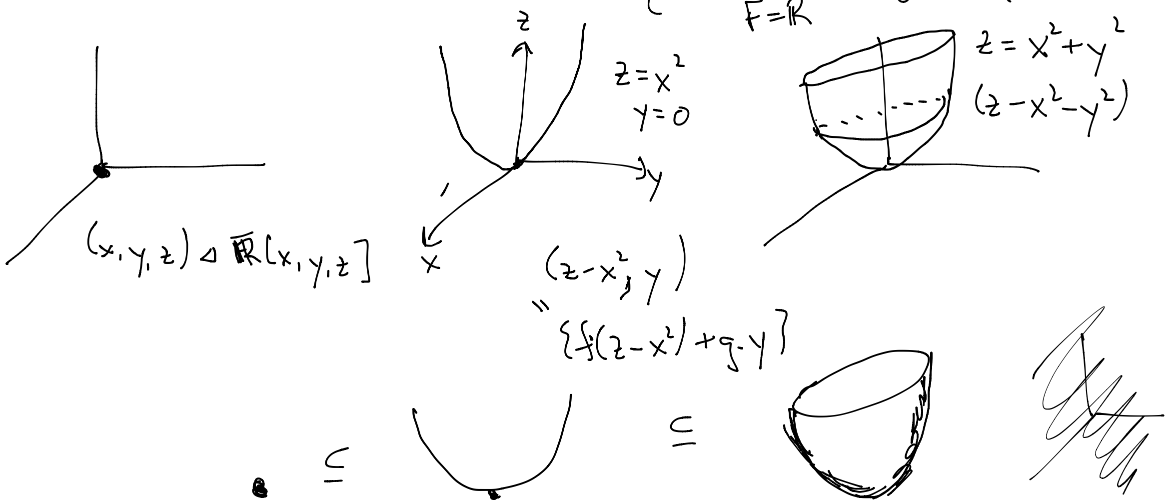
הניסוח הנכון של המשפט היסודי של האריתמטיקה: יהי $(0)\neq I\lhd\mathbb{Z}$ אידיאל. ניתן להציג את I באופן יחיד כמכפלה של אידיאלים

ראשוניים לא אפסיים.

<u>שאלה</u> האם בטבע שמורה הקשר בין יריעות אלגבריות ואידיאלים בחוג פולינומים. האם

$V \subset F^n$ יריעה אי-פריקה $\iff$ $I(V) \trianglelefteq F[x_1,\dots,x_n]$ אידיאל ראשוני.

איך לגרום את המושג של מימד לשפה של חוגים?



$$(x,y,z) \supsetneq (z-x^2,y) \supsetneq (z-x^2-y^2) \supsetneq (0)$$

<u>הגדרה</u> יהי R חוג חילופי. המימד של R (מימד קרול (Krull)) [נסמן: $\dim R$] הינו המספר d הכי גדול כך שקיימת שרשרת של אידיאלים (אמיתיים) <u>ראשוניים</u> של R:

$$I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots \subsetneq I_d$$

<u>הערה</u> יתכן כי $\dim R = \infty$. לדוגמא.

$R = F[x_1,x_2,x_3,\dots]$
$(0) \subsetneq (x_1) \subsetneq (x_1,x_2) \subsetneq \dots \subsetneq$

הגדרה חוג R נקרא תחום ראשי אם R הינו תחום שלמות וכל אידיאל $I \lhd R$ הינו ראשי, $I=(a)$.

דוגמא $\mathbb{Z}$ הינו תחום ראשי.

טענה יהי R תחום ראשי. אזי $\dim R \le 1$.

הוכחה יהי R תחום ראשי. בפרט R תחום שלמות, לכן (0) הינו אידיאל ראשוני. אם אין אידיאלים ראשוניים (לאמיתיים) מלבד (0) (זה קורה, לדוגמא, אם R שדה), אזי $\dim R=0$ וסיימנו. אז נניח שקיים אידיאל ראשוני $(0)\neq P\lhd R$. צריך להוכיח כי P מקסימלי.

אכן. רוצים להוכיח כי $\dim R=1$, אז אי אפשר להאריך את השרשרת $\underset{I_0}{(0)} \subsetneq \underset{I_1}{P}$. אם P לא מקסימלי, נקבל $(0)\subsetneq P \subsetneq M$ מקסי' ולכן ראשוני.

אז יהי M אידיאל מקסימלי כך ש- $P\subseteq M$ (הוכחנו לפני כמה שזה קיים). אך R תחום ראשי, לכן $P=(p)$, $M=(m)$.

בפרט, $p\in M=(m)$, לכן קיים $r\in R$ כך ש- $p=mr\in P$.

אבל P ראשוני, לכן $m\in P$ או $r\in P$.

1) אם $m\in P$, אזי $(m)=M\subseteq P \Leftarrow P=M$, לכן P מקסימלי כמו שרצינו.

2) אם $r\in P=(p)$, אזי $r=pa$ עבור $a\in R$ מסוים.

לכן,

$$p=mr=mpa$$
$$p-pma=0$$
$$p(1-ma)=0.$$

אך $p\neq 0$ כי $P\neq(0)$ לפי הנחה. אך R תחום שלמות, לכן $1-ma=0$, לכן $ma=1$, לכן $1\in(m)=M$, בסתירה למקסימליות של M.

<u>תוצאה</u> $\mathbb{Z}[x]$ אינו תחום ראשי.

<u>הערה</u> $(2,x)$ מועמד טבעי לאידיאל לא ראשי.

$$(0)\subsetneq(x)\subsetneq(2,x)$$

כל האידיאלים האלה ראשוניים. אכן

$\mathbb{Z}[x]$ תחום שלמות $\Leftarrow$ (0) ראשוני.

$\mathbb{Z}[x]/(x)\cong\mathbb{Z}$ תחום שלמות $\Leftarrow$ (x) ראשוני.

$\mathbb{Z}[x]/(x,2)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ תחום שלמות (שדה) $\Leftarrow$ $(2,x)$ ראשוני.

לכן $\dim\mathbb{Z}[x]\geq 2$, לכן $\mathbb{Z}[x]$ לא תחום ראשי בגלל הטענה הקודמת.

<u>הגדרה</u> יהי R חוג, לאו בהכרח חילופי.

א) R נקרא נתרי משמאל/מימין אם כל שרשרת עולה

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq I_4 \subseteq \dots$$

של אידיאלים שמאליים/ימניים מתייצבת, כלומר קיים N כך ש- $I_N = I_{N+1} = I_{N+2} = \dots$.

R נקרא נתרי אם הוא נתרי גם משמאל וגם מימין
(אם R חילופי, אזי נתרי $\Leftrightarrow$ נתרי מימין $\Leftrightarrow$ נתרי משמאל)

ב) R נקרא ארטיני משמאל/מימין אם כל שרשרת יורדת של אידיאלים שמאליים/ימניים
$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$ מתייצבת.

<u>דוגמאות</u> $\mathbb{Z}$ לא ארטיני

$$2\mathbb{Z} \supsetneq 4\mathbb{Z} \supsetneq 8\mathbb{Z} \supsetneq 16\mathbb{Z} \supsetneq \dots$$

שרשרת יורדת לא מתייצבת, אבל $\mathbb{Z}$ כן נתרי.

כי אם $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$, $n_2 | n_1$

$I_1 = (n_1)$, $I_2 = (n_2)$, $I_3 = (n_3)$, $n_3 | n_2$

$\vdots$

משפט (Akizuki, 1920's חילופי R; Hopkins-Levitzki 1938) כל חוג ארטיני (משמאל/מימין) הינו נותרי (משמאל/מימין)

טענה יהי R חוג נותרי/ארטיני משמאל/מימין. יהי $I \triangleleft R$ אידאל דו-צדדי. אזי R/I נותרי/ארטיני משמאל/מימין

הוכחה נניח במקרה הנותרי. יהי $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$ שרשרת עולה של אידאלים משמאל/ימניים של R/I. לפי ההתאמה ניתן להרים אותה לשרשרת $J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq \dots$ של אידאלים של R (שמכילים את I).

לפי ההנחה השרשרת של J-ים מתייצבת. לכן השרשרת המתאימה של I-ים גם מתייצבת.

$$f: R \to R/I$$

$$f^{-1}(I_n) \leftarrow I_n$$

טענה כל תחום ראשי הינו נותרי.

הוכחה יהי $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$ שרשרת עולה. צריך להוכיח שהיא מתייצבת. יהי $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. זה אידאל אכן, כמו בהוכחה

של הקיום של אידיאלים מקסימליים. אך

R תחום ראשי, לכן $J=(a)$ עבור $a\in R$ מתאים.

אך $a\in J=\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, אזי קיים N כך ש- $a\in I_N$, לכן

$I_N=\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, לכן $I_N=I_{N+1}=I_{N+2}=\dots$

<u>תרגיל העשרה</u> נתבונן בחוג

$$R=F[x_1,x_2,x_3,\dots]\Big/\underbrace{(x_1^2,x_2^2,x_3^2,\dots)}_{I}$$

<u>טענה</u> $\dim R=0$ ואין אידיאלים ראשוניים מלבד (0).

אבל R לא נתרי כי

$$I+(x_1)\subseteq I+(x_1,x_2)\subseteq I+(x_1,x_2,x_3)\subseteq\dots$$

שרשרת אינסופית של אידיאלים ראשוניים

$F[x_1,x_2,\dots]$ לכן מתאימה לשרשרת עולה

אינסופית של חוג המנה R

<u>טענה</u> יהי R תחום שלמות ארטיני. אזי R שדה.

<u>הוכחה</u> יהי $0\neq a\in R$. צריך להוכיח כי a הפיך.

נתבונן בשרשרת היורדת $(a)\supseteq(a^2)\supseteq(a^3)\supseteq\dots$

$a^3=a^2\cdot a\in(a^2)$

לפי הנחה, R ארטיני, לכן קיים N כך ש-

$$(a^N) = (a^{N+1}) = \cdots$$

בפרט, $a^N \in (a^{N+1}) \Leftarrow$ קיים $b \in R$ כך ש-

$$a^N = a^{N+1} b$$

$$a^N (1-ab) = 0$$

$$a a \cdots a (1-ab) = 0.$$

R תחום שלמות, $a \neq 0$. לכן $1-ab=0$, לכן a הפיך.
לכן R שדה.

<u>מסקנה</u> יהי R חוג חילופי ארטיני. אזי $\dim R = 0$.
(זה נכון גם לחוגים לא חילופיים).

<u>הוכחה</u> יהי R חוג כנ"ל. יהי P אידיאל ראשוני. אזי R/P הינו תחום שלמות (כי P ראשוני) ארטיני (כי R ארטיני). לפי הטענה הקודמת, R/P שדה.
לכן P מקסימלי. זה אומר שאין שרשראות $P_0 \subsetneq P$, של אידיאלים ראשוניים של R, כי אז P_0 לא היה מקסימלי. לכן $\dim R = 0$.