89113 אלגברה ליניארית 2 תרגיל 7 – פתרון

1. יהי V מרחב ווקטורי ממַמד סופי מעל שדה F. מה הפולינום המינימלי $m_{I_V}(x)\in F[x]$ עבור העתקת הזהות $I_V\in L(V,V)$? מה הפולינום המינימאלי $m_{0_{L(V,V)}}(x)\in F[x]$ עבור העתקת האפס $0_{L(V,V)}\in L(V,V)$?

$m_{I_V}(x)=x-1$ כי כאשר מציבים העתקה T בפולינום $f(x)$, מחליפים ב $x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_0$ ב $T^k+a_{k-1}T^{k-1}+\cdots+a_0I_V$. כאן הצבה בתוך $m_{I_V}(x)=x-1$ נותן $(I_V-I_V)(\mathbf{v})=I_V(\mathbf{v})-I_V(\mathbf{v})$. $m_{0_V}(x)=x$ כי $x\left(\mathbf{0}_{L(V,V)}\right)=\mathbf{0}_{L(V,V)}$.

2. יהיו $a,b,c\in F$ עבור שדה F. בהינתן

$$A=\begin{bmatrix}0&0&c\\1&0&b\\0&1&a\end{bmatrix}.$$

הוכח שהפולינום האופייני של A הוא $p_A(x)=x^3-ax^2-bx-c$ ושזה גם הפולינום המינימלי.

בדיקה ישירה נותנת של $p_A(x)=|xI_3-A|=x^3-ax^2-bx-c$. בנוסף $A^2=\begin{bmatrix}0&c&ac\\0&b&ab\\1&a&b+a^2\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}0&0&c\\1&0&b\\0&1&a\end{bmatrix}$, ו I_3 הם בת"ל במרחב הווקטורי ה 9 ממדי $F^{3\times3}$.

3. תהי

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\-1&-1&0&0\\-2&-2&2&1\\1&1&-1&0\end{bmatrix}.$$

הראה שהפולינום האופייני $p_A(x)$ והפולינום המינימלי $m_A(x)$ שניהם שווים $x^2(x-1)^2$.

שימו לב ש $A=\begin{bmatrix}A_1&\mathbf{0}_{2\times 2}\\A_2&A_3\end{bmatrix}$ היא מטריצה בבלוקים 2×2. כנ"ל xI_4-A. לכן $p_A(x)=|xI_4-A|=|xI_2-A_1|\cdot|xI_2-A_3|=x^2\cdot(x-1)^2$. בנוסף,

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-3&-3&3&2\\2&2&-2&-1\end{bmatrix},\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-4&-4&4&3\\3&3&-3&-2\end{bmatrix}$$ ובדיקה ישרה מראה

ש $\{I_4, A, A^2, A^3\}\subset F^{4\times4}$ היא קבוצה בת"ל מעל F -- ניתן להסתכל רק על איברים על האלכסון ולספור כמה שונים מ 0. ב I_4 יש 4 איברים שונים מ 0, ב A יש 3 איברים שונים מ 0, ב A^2 יש 2, ב A^3 יש 2. אז המטריצה בת"ל מעל כל שדה ממאפיין שונה מ 2. אם המאפיין הוא 2 הם גם בת"ל.

4. האם המטריצה מתרגיל 3 דומה למטריצה אלכסונית מעל השדה $\mathbb{C}$?

לא, כי ל $m_A(x)$ יש שורשים עם ריבוי גדול מ 1.

5. תהי V מרחב ווקטורי ממימד n. נניח ש $T\in L(V,V)$ כך ש $T^k=0_{L(V,V)}$ עבור $k>0$ כל שהוא. הוכח ש $T^n=0_{L(V,V)}$. רמז: השתמש בתכונות הפולינום המינימלי.

מהנתון, הפולינום המינימלי מחלק את x^k, כי x^k מאפס את T, והפולינום המינימלי מחלק כל פולינום שמאפס את T. עכשיו מלכתחילה ייתכן ש $n<k$. אבל, ממשפט קיילי-המילטון הפולינום האופייני הוא פולינום ממעלה n שגם מאפס את T, והפולינום המינימלי מחלק גם אותו. בסך הכול, הפולינום המינימלי הוא מחלק גם פולינום ממעלה n, וגם x^k, ולכן $m_T(x)=x^d=0_{L(V,V)}$ עבור $d\le n$. לכן $T^n=T^{n-d}\circ T^d=T^{n-d}\circ 0=0_{L(V,V)}$.

6. מצא/י מטריצה 3×3 עבורה הפולינום המינימלי שווה x^2.

$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ לדוגמה.... הוא שונה מ $0_{3\times3}$ והריבוע שווה $0_{3\times3}$.

7. תהי $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ הפונקציה שמטילה כל ווקטור על הישר ה $y=x$, על ידי $T(x,y)=\left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2}\right)$.

a. הוכח ש T היא העתקה ליניארית.

b. מצא/י את $m_T(x)$ הפולינום המינימלי של T.

c. האם T לכסינה? אם כן מצא $P\in\mathbb{R}^{2\times2}$ כך ש $P^{-1}[T]_E P=D$, כאשר D היא מטריצה אלכסונית, ו $E\subset\mathbb{R}^2$ הוא הבסיס הסטנדרטי.

a. המטריצה של T בבסיס הסטנדרטי הוא $\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}=A$, וכפל במטריצה הוא העתקה ליניארית על $\mathbb{R}^2$.

b. ל T שני ערכים עצמיים שונים, שהם 0 ו1. לכן $m_T(x)=x(x-1)$.

c. כן, T לכסינה כי הפולינום המינימלי ללא שורשים כפולים. אם $P=P_{B\to E}$, כך ש $P[\mathbf{v}]_B=[\mathbf{v}]_E$, כאשר B הוא בסיס של ערכים עצמיים מתקיים ש $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ היא אלכסונית. $P=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}$, כי הווקטורים העצמיים הם $\begin{bmatrix}1/2\\ 1/2\end{bmatrix}$ עם ערך עצמי 1, ו $\begin{bmatrix}1/2\\ -1/2\end{bmatrix}$ עם ערך עצמי 0.

8. הוכיחו שעבור בלוק ג'ורדן, הפולינום האופייני שווה לפולינום המינימלי.

הרעיון: עבור בלוק ג'ורדן $J=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & & & \lambda\end{pmatrix}$ מסדר n , הפ"א הוא $P_J=(x-\lambda)^n$

$J-\lambda I=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & & & 0\end{pmatrix}$, $(J-\lambda I)^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & \ddots & 0\\ & & & & 0\end{pmatrix}$ וכך הלאה, כל הכפלה נוספת ב $J-\lambda I$ תדחוף את האלכסון שיש בו 1 למעלה עוד שלב, עד שנקבל אחרי $n-1$ צעדים מטריצה ובה רק 1 יחיד בפינה הימנית העליונה. ואחרי הכפלה נוספת ב $J-\lambda I$ תתקבל מטריצת האפס.

המסקנה היא ש $(J-\lambda I)^k\neq 0$ (ולכן גם $(\lambda I-J)^k=(-I)^k(J-\lambda I)^k\neq 0$) לכל $1\le k\le n-1$. לכן הפ"מ חייב להיות שווה לפ"א - $(x-\lambda)^n$.