תרגיל בית 2

1) הוכיחו: המשלים של קבוצה אלמנטרית $E\in\mathcal{E}$
היא קבוצה אלמנטרית.

(כלומר: $E\in\mathcal{E} \iff E^c\in\mathcal{E}$)

2) הגדרה: קבוצה $G\subseteq\mathbb{R}^2$ היא מטיפוס G_δ אם ניתן
להציג אותה כחיתוך מני של קבוצות פתוחות.

תהי $E\subseteq\mathbb{R}^2$. הוכיחו שקיימת קבוצה $G\in G_\delta$
המקיימת $E\subseteq G$ וגם $m^*(G)=m^*(E)$

3) נתונה קבוצה $A\subset\mathbb{R}$ ומספרים $a,b\in\mathbb{R}$
מגדירים את הקבוצה: $aA+b := \{ax+b \mid x\in A\}$
[כלומר $aA+b$ היא תמונת A תחת ההעתקה $x\mapsto ax+b$]

הוכיחו: $m^*(aA+b)=|a|\,m^*(A)$

4) נניח כי לכל n A_n הינה קבוצה מדידה (לבג) מוכלת ב-$[0,1]\subset\mathbb{R}$
תהי B קבוצת כל ה-x-ים המופיעים באינסוף קבוצות A_n.

א) הראו כי B הינה מדידה לבג

ב) אם $m^*(A_n)>\delta>0$ לכל n, אזי $m^*(B)>\delta$

ג) אם $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)<\infty$ אזי $m^*(B)=0$

ד) הוכיחו או הפריכו:

אם $m^*(B)=0$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)<\infty$