תרגיל 2 מופשטת 3

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. שחקו ב Euclid the game (http://euclidthegame.com/) עד שלב 6 כולל. הגישו רק את הפתרון שלכם לשלב 4 (בניית ניצב לקו ישר).
פתרון: נניח ש A היא הנקודה על הישר l שדרכה אנו רוצים להעביר ניצב. נבנה מעגל שמרכזו ב A ורדיוסו 1 (או כל מספר שתרצו). המעגל חותך את הישר l בשתי נקודות P, Q נשים לב ש A נמצאת בדיוק באמצע הקטע PQ. נבנה מעגל שמרכזו ב P ורדיוסו PQ ונבנה מעגל שמרכזו ב Q ורדיוסו PQ. נסמן אחת מנקודת החיתוך של שני מעגלים אלו ב X. נמתח קו מ X ל A. זה הישר המבוקש.

2. נניח כי a, b הם מספרים ניתנים לבניה. הוכיחו כי ab ניתן לבניה. (רמז: דמיון משולשים). הניחו כי אתם יכולים לבנות כל מה שעשיתם כבר בשאלה 1.
פתרון: נמתח קו מ $(a, 0)$ ל $(1, 0)$ - נקרא לו l_1.(נשים לב שאם q ניתן לבניה אז גם $(0, q)$ניתן לבניה כי מעגל ברדיוס q שמרכזו ב $(0, 0)$ חותך את $(0, q)$) נעביר קו הישר העובר דרך $(0, b)$ וניצב ל l_1 - נקרא לו l_2(זה שלב 6 במשחק של שאלה 1). החיתוך של l_2 וציר x הוא $(0, ab)$ לפי דמיון משולשים.

3. פתרו את מערכת המשוואות (בנעלמים s, t) מעל השדה $\mathbb{Q}[x]/\langle x^3 + 2\rangle$:

$$\begin{aligned} s + xt &= 1 \\ xs + t &= -1 \end{aligned}$$

בטאו את התשובה עם נציגים בדרגה מינימלית.
פתרון: נכפול משוואה ראשונה ב x ונקבל

$$\begin{aligned} xs + x^2 t &= x \\ xs + t &= -1 \end{aligned}$$

נפחית משוואה שניה מראשונה ונקבל

$$(x^2 - 1)t = x + 1$$

כלומר

$$(x - 1)t = 1$$

אנחנו רוצים למצוא את ההופכי של $x - 1$. נשים לב ש

$$x^3 + 2 = (x^2 + x + 1)(x - 1) + 3$$

ולכן

$$\frac{1}{3}(x^3 + 2) - \frac{1}{3}(x^2 + x + 1)(x - 1) = 1$$

כלומר בשדה שלנו

$$(x - 1)^{-1} = -\frac{1}{3}(x^2 + x + 1)$$

ולכן

$$t = -\frac{1}{3}(x^2 + x + 1)$$

לפי המשוואה הראשונה

$$s = 1 - xt = 1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

(החישוב הוא $\mod x^3 + 2$) x או 1 במשוואות זה כמובן קיצור עבור $x + \langle x^3 + 2\rangle$ או $1 + \langle x^3 + 2\rangle$).

4. הוכיחו כי $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$.
פתרון: ברור ש $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ ולכן

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}] \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$$

מצד שני

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3$$

ולכן

$$\sqrt{6} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$$

עכשיו

$$\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$$

ולכן

$$2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$$

ובוודאי

$$\sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$$

ולכן

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$$

כנדרש.