1. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית עולה.

א. הוכיחו שלכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\lim_{x\to a^-} f(x)=\sup\left\{f(x)\mid x<a\right\}$. למה שווה $\lim_{x\to a^+} f(x)$? (אין צורך להוכיח).

ב. הסיקו שכל נקודות אי הרציפות של $f$ הן ממין ראשון.

**<u>פתרון</u>**

א. יהי $L=\sup\left\{f(x)\mid x<a\right\}$. נראה ש $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$. יהי $\varepsilon>0$, מהגדרת סופרמום קיים $x_0<a$ כך ש $f(x_0)>L-\varepsilon$. מכיון ש $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית עולה אז לכל $x_0<x<a$ מתקיים $f(x)\ge f(x_0)>L-\varepsilon$. מצד שני ברור ש $L+\varepsilon\ge f(x)$ לכל $x<a$. בסה"כ נקבל שלכל $x\in\left(x_0,a\right)$ מתקיים $\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$. לכן, $\lim_{x\to a^-} f(x)=\sup\left\{f(x)\mid x<a\right\}$ כדרוש. משיקולים דומים קל לראות ש $\lim_{x\to a^+} f(x)=\inf\left\{f(x)\mid x>a\right\}$.

ב. מיידי מא' שהגבולות החד צדדיים קיימים תמיד. מכיון שהפונקציה מוגדרת בכל נקודה ומונוטונית עולה בלתי אפשרי שאי הרציפות תהיה סליקה. נניח בשלילה ש $\lim_{x\to a} f(x)=L\neq f(a)$. אם $f(a)>L$ אז נקבל מסעיף א' ש $f(a)>\inf\left\{f(x)\mid x>a\right\}$. מהגדרת אינפימום נקבל שקיים $x>a$ כך ש $f(a)>f(x)$. בסתירה לכך ש $f$ מונו' עולה. אם $f(a)<L$ אז נקבל מסעיף א' ש $f(a)<\sup\left\{f(x)\mid x<a\right\}$ וגם מכאן ניתן לקבל סתירה למונוטוניות. בסה"כ בנקודת אי רציפות נקבל שהגבולות החד צדדיים קיימים סופיים (למה הם סופיים בהכרח?) ושונים ולכן מדובר באי רציפות ממין ראשון.

2. א. הוכיחו ש $\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

ב. באמצעות סכומי רימן חשבו את $\int_0^1 x^3dx$.

**<u>פתרון</u>**

א. הוכחה באינדוקציה.

ב. הפונקציה $x^3$ רציפה בקטע הסגור $[0,1]$ ולכן אינטגרבילית בו. לכן, ניתן לחשב את ערך האינטגרל $\int_0^1 x^3dx$ לפי גבול של סכומי רימן המתאימים לסדרת חלוקות נורמלית כלשהי ולבחירת נקודות בכל תת קטע כרצוננו.

תהי $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת חלוקות שוות עם $\lim_{n\to\infty}\lambda(T_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. זוהי סדרה נורמלית. נבחר נקודות קצה ימניות $\alpha_k=\frac{k}{n}\quad \forall 1\le k\le n$.

נקבל באמצעות סעיף א:

$$\int_0^1 x^3dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{1}{4}$$