תרגול כיתה 6 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה
התפלגויות בדידות מיוחדות

נוסחאות:

התפלגות בינומית $X \sim Bin(n, p)$

$$P(X=k)=\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$$

מ"מ X – סופר מספר ההצלחות ב- n ניסויי ברנולי (0 או 1). כאשר ההסתברות להצלחה בניסוי בודד היא p.
P(X = k) – ההסתברות ל- k הצלחות מתוך n. ($k = 0,\dots,n$)
התוחלת והשונות: $V(X)=n\cdot p\cdot(1-p)$ $E(X)=n\cdot p$

התפלגות גיאומטרית $X \sim Geo(p)$

$$P(X=k)=(1-P)^{k-1}\cdot P \qquad k=1,..,n$$

מ"מ X – סופר את מספר הנסיונות עד להצלחה הראשונה (כולל ההצלחה הראשונה).
התוחלת והשונות: $V(X)=\frac{1-p}{p^2}$ $E(X)=\frac{1}{p}$

הערה: להתפלגות גיאומטרית יש תכונת "חוסר זיכרון" ומתקיים
$P(X=s+t \mid X=t)=P(X=s)$ לכל $s,t\geq 0$.

התפלגות פואסון $X \sim Poi(\lambda)$

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

התוחלת והשונות: $E(X)=V(X)=\lambda$

התפלגות בינומית שלילית $X \sim NB(r,p)$

מ"מ X מייצג את מספר הניסויים שיש לבצע על מנת לקבל בדיוק r הצלחות.

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r} \qquad ,k=r,r+1....$$

התוחלת והשונות: $V(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$ $E(X)=\frac{r}{p}$

התפלגות היפר-גיאומטרית $X \sim HG(m,N,n)$

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}} \qquad k=0,1,..,n$$

בוחרים באקראי מדגם מגודל n , מתוך כד המכיל N כדורים – m לבנים ו N –m שחורים.
מ"מ X = מספר הכדורים הלבנים שנבחרו.
התוחלת והשונות: $V(X)=\frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ $E(X)=\frac{nm}{N}$

<u>שאלה 1</u>

רן ושי זורקים לסל כדורים לסירוגין. רן קולע בכל נסיון בסיכוי 0.7 ושי בהסתברות 0.4. רן מתחיל.

מה ההסתברות ששתי הקליעות הראשונות תהיינה רצופות?

<u>פתרון:</u>

נסמן ב- X את מספר הנסיונות עד הקליעה הראשונה של רן, $X \sim G(0.7)$

וב- Y את מספר הנסיונות עד הקליעה הראשונה של שי, $Y \sim G(0.4)$.

כעת,

$$P(Y = X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y = k)P(X = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 0.6^{k-1} \cdot 0.4 \cdot 0.3^{k-1} \cdot 0.7$$

$$= 0.28 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 0.18^{k} = 0.28 \cdot \frac{1}{1-0.18} = 0.341$$

$$P(Y = X+1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y = k+1)P(X = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 0.6^{k} \cdot 0.4 \cdot 0.3^{k-1} \cdot 0.7 = 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.7$$

$$= 0.168 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 0.18^{k} = 0.168 \cdot \frac{1}{1-0.18} = 0.205$$

הסיכוי שהקליעות הראשונות תהיינה ברצף הוא הסכום של השניים, דהיינו: 0.546.

<u>שאלה 2</u>

מחלקת צנחנים הכוללת 20 חיילים וקצין יוצאת למסע. הסיכוי של חייל לסיים הוא 0.8, בעוד שהקצין יסיים בביטחון מלא. הראשון שמגיע לקו הסיום מכין קפה לכל השאר. בהנחה שמתוך המסיימים לכל אחד יש סיכוי שווה להגיע ראשון, מהו הסיכוי שהקצין יכין את הקפה?

<u>פתרון:</u>

נסמן ב- X את מספר החיילים שסיימו את המסע. נגדיר Y – המשתנה המחזיר 1 אם הקצין מכין קפה ו- 0 אחרת.

$$P(Y=1) = \sum_{n=0}^{20} P(Y=1 \mid X=n)P(X=n) =$$

$$\sum_{n=0}^{20} \frac{1}{n+1}\binom{20}{n} 0.8^{n} \cdot 0.2^{20-n} = \frac{1}{21}\sum_{n=0}^{20}\binom{21}{n+1} 0.8^{n} \cdot 0.2^{20-n} =$$

$$\frac{1}{21 \cdot 0.8}\sum_{n=1}^{21}\binom{21}{n} 0.8^{n} \cdot 0.2^{21-n} = \frac{1}{21 \cdot 0.8}(1-0.2^{21}) \approx 0.0595$$

<u>שאלה 3</u>

בכד n כדורים לבנים. מגרילים מהכד מספר כדורים, לפי התפלגות בינומית $Bin(n,p)$, וצובעים אותם.

א. מוציאים כדור מן הכד. מה הסיכוי שהוא צבוע?
ב. בלי להחזיר את הכדור הראשון, מוציאים כדור שני. מה הסיכוי שהוא צבוע?

<u>פתרון:</u>

א). נסמן ב- Y משתנה המחזיר 1 אם הכדור הראשון שהוצאנו צבוע ו- 0 אחרת.

$$P(Y=1)=\sum_{k=0}^{n}P(Y=1|X=k)P(X=k)=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}=p\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-k-1}=$$

$$p(p+1-p)^{n-1}=p$$

ב). נסמן ב- Z את המשתנה המחזיר 1 אם הכדור השני צבוע ו- 0 אחרת. אזי-

$$P(Z=1)=P(Z=1,Y=0)+P(Z=1,Y=1)$$

הערה: מטעמי נוחות סימנו בפתרון "חיתוך" בעזרת "פסיק"- $(A\cap B)\equiv(A,B)$.

החישוב של כל אחד מהחלקים:

$$P(Z=1,Y=0)=\sum_{k=0}^{n}P(Z=1,Y=0|X=k)P(X=k)=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n-1}\cdot\frac{n-k}{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}=p(1-p)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^k(1-p)^{n-k-2}=\boxed{p(1-p)}$$

$$P(Z=1,Y=1)=\sum_{k=0}^{n}P(Z=1,Y=1|X=k)P(X=k)=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k-1}{n-1}\cdot\frac{k}{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^{k+2}(1-p)^{n-k-2}=p^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^k(1-p)^{n-k-2}=\boxed{p^2}$$

חיבור של השניים נותן את ההסתברות המבוקשת:

$$P(Z=1)=p(1-p)+p^2=p$$

<u>שאלה 4</u>

עודד מקבל דמי כיס פעם בחודש ואז מחליט אם לקנות לעצמו ספר חדש או לא. ההסתברות שעודד יקנה ספר חדש היא 0.6. נניח שבהתחלה לא היה לעודד אף ספר.

א) מהי ההסתברות שאחרי 10 חודשים, יש לעודד 6 ספרים?

ב) מה ההסתברות שלעודד יהיו 4 ספרים <u>בדיוק</u> לאחר ששה חודשים?

<u>פתרון:</u>

נגדיר מ"מ X – מספר הספרים שיש לעודד לאחר תקופה מסוימת (בחודשים).

א). ההסתברות המבוקשת:

$$X \sim Bin(10, 0.6) \qquad \Rightarrow P(X=6) = \binom{10}{6}(0.6)^6(0.4)^4 = 0.2580$$

ב). נתון שבחודש השישי עודד קונה ספר רביעי, מדובר התפלגות בינומית שלילית: $X \sim NB(4, 0.6)$

ההסתברות המבוקשת-

$$P(X=4) = \binom{6-1}{4-1}(0.6)^4(0.4)^2 = 0.20736$$

<u>שאלה 5</u>

ידוע שמספר הרכבים הנכנסים לצומת מתפלג פואסון עם $\lambda = 5$ לדקה. מה ההסתברות ש-

א) בין 10:00 ל- 10:01 לא ייכנס אף רכב?

ב) בדקה מסויימת ייכנסו לפחות 3 רכבים?

ג) בין 11:00 ל- 11:05 ייכנסו 20 רכבים?

ד) בהינתן שבמשך חצי דקה נכנסו 4 רכבים, מה ההסתברות שבמהלך כל אותה הדקה הבאה ייכנסו 6 רכבים סה"כ?

<u>פתרון:</u>

נזכיר: פונקציית ההסתברות של התפלגות פואסון: $\left(\lambda > 0,\ k \in \{0,1,2,...\}\right)$ $\quad P(X=k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

מנתוני השאלה: $X \sim Poi(5)$ – מס' הרכבים (נשים לב שהיחידות נמדדות בדקה).

א) $P(X=0) = \dfrac{5^0 e^{-5}}{0!} = e^{-5} = 0.0067$

ב)

$$\begin{aligned}
&P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 2) \\
&= 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\right] \\
&= 1 - \left[e^{-5} + \frac{5e^{-5}}{1!} + \frac{5^2 e^{-5}}{2!}\right] = 1 - e^{-5}\left[1 + 5 + \frac{5^2}{2}\right] = 0.875
\end{aligned}$$

ג) נעזר בעובדה הבאה לגבי התפלגות פואסון $X \sim Poi(\lambda) \Rightarrow tX \sim Poi(\lambda t)$

ולכן עבור יחידת זמן של 5 דקות $X \sim Poi(5 \cdot 5)$ (כלומר 5 פניות בדקה <= 25 פניות ב-5 דקות)

מכאן, $P(5X = 20) = \dfrac{25^{20} e^{-25}}{20!} = 0.052$

ד). ניצול תכונת האי-תלות בקטעי זמן זרים.

$$P\left(X(1) = 6 \mid X\left(\tfrac{1}{2}\right) = 4\right) = \frac{P\left(X\left(1-\tfrac{1}{2}\right) = 6-4\right) P\left(X\left(\tfrac{1}{2}\right) = 4\right)}{P\left(X\left(\tfrac{1}{2}\right) = 4\right)} = P\left(X\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\right)$$

$$= \frac{2.5^2 e^{-2.5}}{2!} = 0.2565$$

<u>שאלה 6</u>

במפעל ממתקים נארזות סוכריות אדומות וירוקות בהסתברות שווה, בשקיות אטומות של 10 סוכריות בחבילה.
נתון שב- 20% מהחבילות נארזות 8 סוכריות אדומות וב- 80% מהחבילות נארזות 6 סוכריות אדומות.
במיכל גדול בחנות מפוזרות הרבה חבילות סוכריות מהסוג הנ"ל.
קונה בחנות מחליט לרכוש חבילות סוכריות באופן הבא:
הוא בוחר חבילה באקראי מהמיכל, פותח אותה ושולף באקראי 4 סוכריות ללא החזרה מהחבילה. אם רוב הסוכריות ששלף אדומות הוא קונה את החבילה.
איזה אחוז מהחבילות במיכל הוא יקנה?

<u>פתרון:</u>

נסמן: B – המאורע שהאדם קונה חבילה.
A_1 – החבילה שנבחרה מכילה 8 סוכריות אדומות.
A_2 – החבילה שנבחרה מכילה 6 סוכריות אדומות.

ההסתברות המבוקשת מתקבלת בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(B)=P(3\ red\text{-}or\text{-}4\,red \mid A_1)P(A_1)+P(3\ red\text{-}or\text{-}4\,red \mid A_2)P(A_2)$$

הבחירה של 4 הסוכריות ללא החזרה מתפלגת, עבור כ"א מסוגי החבילות-

$$X(A_1)\sim HG(N=10,m=8,k=4),\quad X(A_2)\sim HG(10,6,4)$$

נזכיר: פונקציית ההסתברות של ההתפלגות ההיפרגאומטרית HG(N,m,k) היא:

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}\qquad k=0,1,..,n$$

כאשר נבחרו מחבילה של 8 אדומות, רוב הסוכריות אדומות בהסתברות-

$$P(3\ red\text{-}or\text{-}4\,red)=P(X=3)+P(X=4)$$

$$=\frac{\binom{2}{1}\binom{8}{3}}{\binom{10}{4}}+\frac{\binom{2}{0}\binom{8}{4}}{\binom{10}{4}}=0.8667$$

כאשר נבחרו מחבילה של 6 אדומות, רוב הסוכריות אדומות בהסתברות-

$$P(3\ red\text{-}or\text{-}4\,red)=P(X=3)+P(X=4)$$

$$=\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{3}}{\binom{10}{4}}+\frac{\binom{4}{0}\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}}=0.4524$$

נותר להציב בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(B)=0.4524\cdot 0.2+0.8667\cdot 0.8=\boxed{0.7838}$$

כלומר, הקונה ירכוש 78.38% מהחבילות במיכל.